Introduzione alla Teoria dei Giochi

A. Agnetis*

Questi appunti presentano alcuni concetti introduttivi fondamentali di Teoria dei Giochi. Si tratta di appunti pensati per studenti di Ingegneria Gestionale (terzo anno), e hanno lo scopo di mettere in luce gli aspetti concettuali più importanti. Pertanto, non verranno approfondite le applicazioni di carattere economico (teoria del duopolio...).

La Teoria dei Giochi è una disciplina alquanto vasta, il cui scopo è analizzare i comportamenti strategici dei decisori (giocatori), ovvero studiare le situazioni in cui diversi giocatori interagiscono perseguendo obiettivi comuni, diversi o conflittuali. Un ruolo centrale nella teoria dei giochi è svolto dal concetto di *soluzione* di un gioco, che, come preciseremo meglio in seguito, è l'identificazione di una o più strategie, da parte dei diversi giocatori, compatibili con determinate assunzioni di razionalità e intelligenza dei giocatori stessi.

La teoria dei giochi può avere due ruoli diversi. Il primo (ruolo *positivo*) è quello di interpretare la realtà, ossia spiegare come mai, in certe situazioni di conflitto, i soggetti coinvolti (giocatori) adottano certe strategie e certe tattiche. Il secondo ruolo (*prescrittivo*, che è anche il punto di vista che adotteremo in questo testo) è invece quello di determinare quali situazioni di equilibrio possono (o non possono) verificarsi come risultato dell'interazione dei due soggetti. In ogni caso, i concetti di soluzione che sono utilizzati nella teoria dei giochi intendono descrivere quelle strategie che i decisori, individualmente o congiuntamente, dovrebbero seguire come conseguenza delle ipotesi di razionalità di cui si diceva. Se poi nella realtà i decisori si discostano da quanto previsto dalla teoria, occorre indubbiamente interrogarsi se ciò accade perché il modello non cattura tutti gli aspetti rilevanti di una situazione, oppure perché sono i decisori a comportarsi in modo non razionale (o tutt'e due le cose...).

La differenza fondamentale tra la teoria delle decisioni e la teoria dei giochi sta nel fatto che mentre, nella prima, il decisore si trova ad affrontare un problema decisionale di fronte a "stati di natura" aleatori, di cui eventualmente ha una caratterizzazione probabilistica, nel secondo caso ha di fronte un altro decisore. La conseguenza di questo fatto è che mentre in un problema di decisione (e.g. sequenziale) lo scopo è quello di giungere a una

*Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione - Università di Siena

scelta (o eventualmente, a una successione di scelte) ottimale, stavolta occorre elaborare un concetto diverso, quale quello di equilibrio.

1 Razionalità

Come già accennato, la teoria dei giochi è fondata su alcune ipotesi che caratterizzano il modo fondamentale di agire (e di pensare) degli individui. Sinteticamente, queste ipotesi possono esprimersi dicendo che gli individui che interagiscono in un problema decisionale si suppone siano *intelligenti* e *razionali*. Questi due termini hanno in questo caso un significato ben preciso. Senza entrare in troppi dettagli, diremo solo brevemente che per individuo *razionale* si intende, in senso stretto, uno che è in grado di ordinare le sue preferenze su un insieme di risultati, e che queste preferenze soddisfano un insieme di assiomi, per lo più assolutamente ragionevoli (*assiomi della razionalità* di von Neumann e Morgenstern)[1]. "Ordinare le sue preferenze" vuol dire che, dati due risultati x e y (esempio: x =disporre di 4000 euro e y = avere un biglietto aereo per i Caraibi), un decisore è sempre in grado di dire se *per lui/lei* x è meglio di y ($x \succ y$), y è meglio di x ($y \succ x$), o se sono allo stesso livello ($x \sim y$). Gli assiomi sono relativi al modo di ordinare le preferenze allorché si confrontano risultati certi con altri incerti (*lotterie*).

Per quello che serve a noi in queste dispense, la conseguenza fondamentale è che un individuo razionale può assegnare un valore di utilità a ciascuno dei risultati che possono derivare dalle decisioni congiunte dei vari decisori, ossia ai vari profili, e orienterà le sue scelte nella direzione di massimizzare la propria utilità[2]. Un concetto chiave nella teoria delle decisioni è quello di *utilità attesa*. Questo concetto consente di associare un'utilità anche a un evento aleatorio (ma di cui sia nota la descrizione probabilistica), semplicemente associandovi il valore atteso dell'utilità dei vari risultati. Supponiamo ad esempio che $u(x)$ sia la mia funzione di utilità (ove x rappresenta un importo monetario), e che per me $u(1000) = 10$ e $u(500) = 6$. Se allora io considero una lotteria in cui con probabilità 0.5 vinco 1000 euro e con probabilità 0.5 vinco 500 euro, l'utilità attesa di questa lotteria sarà $0.5u(1000) + 0.5u(500) = 5 + 3 = 8$.

Spesso si assume che un decisore, oltre che razionale, sia anche *intelligente*. Questo termine indica semplicemente la capacità logica di saper riconoscere le azioni necessarie per massimizzare la propria utilità, ossia per agire in modo razionale. Possono apparire

[1] Ovviamente non vogliamo liquidare così il dibattito, articolato e di lunga data, che si è sviluppato attorno agli assiomi della razionalità; questo argomento è però più appropriato all'interno di un corso di teoria delle decisioni che di teoria dei giochi.

[2] Il problema di determinare i valori di utilità per un decisore può essere risolto applicando il Teorema di von Neumann e Morgenstern, che verrà visto con un certo dettaglio nel corso di Modelli per Sistemi di Supporto alle Decisioni I.

definizioni

In definitiva, la *soluzione* di un gioco è una descrizione sistematica dei risultati che possono emergere in un determinato tipo di gioco, compatibili con le ipotesi di intelligenza e di razionalità dei giocatori. Semplificando un po', si può dunque dire che la teoria dei giochi si propone di suggerire soluzioni "ragionevoli" e ne analizza le proprietà.

2 Giochi strategici

Un gioco strategico è un modello di interazione tra decisori (chiamati anche *giocatori*) in cui ciascuno pianifica le proprie azioni una volta per tutte, e tali scelte sono effettuate simultaneamente. Gli ingredienti fondamentali di un gioco sono pochi e semplici. Un gioco strategico è costituito da N *giocatori*, ciascuno dei quali dispone di un insieme $A^i = \{a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{n_i}^i\}$ di n_i possibili *azioni* o *strategie*. Se ciascun giocatore i sceglie una strategia $a_k^i \in A^i$, si ha un *profilo*, ovvero una N-pla di strategie, $\mathbf{a} = (a_{i_1}^1, a_{i_2}^2, \ldots, a_{i_N}^N)$, cui corrisponde un *risultato*. Ciascun decisore ha un proprio ordine di preferenze sull'insieme A dei possibili *risultati*, ossia delle conseguenze che si vengono a produrre allorché ciascun giocatore compie una determinata azione. Il fatto che le preferenze del decisore siano definite su A e non sul proprio insieme A^i è proprio quello che distingue un gioco da un problema decisionale in condizioni di rischio: l'interazione con gli altri giocatori non è trascurabile.

Tipicamente, la relazione di preferenza di ciascun giocatore sull'insieme A può essere espressa attraverso una funzione di utilità (o payoff), associata a ciascun giocatore, che fa corrispondere valori più elevati a risultati più graditi. Dunque, al giocatore i possiamo associare una funzione $u_i(\mathbf{a})$, definita su A, che esprime l'utilità per il giocatore i derivante dal profilo $\mathbf{a}$.

Vediamo ora alcuni esempi classici. Pur essendo molto semplici, già contengono elementi essenziali che si ritrovano in situazioni più complesse.

Esempio 1 (Il dilemma del prigioniero). *Due persone, sospettate di aver commesso un reato sono detenute in celle separate. Ognuno può scegliere di* confessare*(*C*) oppure di* non confessare*(*NC*). La scelta di ciascuno dei due influenza anche il destino dell'altro. Infatti, se entrambi confessano, saranno condannati a 10 anni di prigione. Se solo uno dei due confessa, accusando dunque l'altro, potrà beneficiare di uno sconto di pena, e avrà quindi solo 1 anno di carcere, mentre l'altro sarà condannato a 25 anni (per l'aggravante di non aver voluto collaborare). Se nessuno dei due confessa, in mancanza di prove testimoniali, ambedue le persone saranno accusate soltanto di danni al patrimonio e condannate a 3 anni di prigione. La situazione può essere schematizzata*

$\downarrow 1 \quad 2 \rightarrow$	C	NC
C	$u_1(10), u_2(10)$	$u_1(1), u_2(25)$
NC	$u_1(25), u_2(1)$	$u_1(3), u_2(3)$

Tabella 1: Il dilemma del prigioniero.

*come segue. Ci sono due giocatori, 1 e 2, ognuno dei quali ha due possibili strategie (*C *o* NC*). Indichiamo con* $u_1(a_1, a_2)$ *l'utilità, per il giocatore 1, relativa al profilo* (a_1, a_2)*, dove* $a_1 \in \{C, NC\}$ *e* $a_2 \in \{C, NC\}$*. Ovviamente, ciascun giocatore vorrà trascorrere in prigione il minor numero possibile di anni, dunque ad esempio l'utilità di* (C, NC) *è l'utilità relativa al fatto di trascorrere 1 solo anno in carcere, e possiamo quindi sinteticamente indicarla con* $u_1(1)$*, mentre* $u_1(NC, NC) = u_1(3)$ *etc. Sarà dunque* $u_1(C, NC) > u_1(NC, NC) > u_1(C, C) > u_1(NC, C)$ *(e analogamente per 2)* [3]*. Il gioco in forma strategica è raffigurato indicato in Tab.1, in cui le righe si riferiscono alla scelta di 1, le colonne a 2. Si noti come l'utilità di ognuno dipende anche dalla scelta dell'altro giocatore.* □

Alcuni aspetti fondamentali di questo gioco si ritrovano nella trattazione classica dei giochi in forma strategica. Anzitutto, noi assumeremo sempre che ciascun giocatore conosca completamente la tabella che descrive l'utilità di ciascun giocatore per ciascun profilo, ossia che la struttura del gioco sia, come si suol dire, *conoscenza comune*.

Inoltre, supporremo che i giocatori non possano stipulare accordi vincolanti: ciascun giocatore dovrà scegliere la propria azione solo in base alle informazioni in suo possesso, ed eventualmente alle sue supposizioni circa il comportamento degli altri giocatori. Su questo punto torneremo nel §5.

Esempio 2 (La battaglia dei sessi). *Lui e Lei hanno deciso di trascorrere la serata assieme. Prima che le batterie del cellulare di Lui si scaricassero, i due stavano discutendo animatamente. Lui cercava di convincere Lei ad andare a vedere un incontro di wrestling, Lei invece cercava di portarlo a un balletto classico. Ambedue, comunque, preferiscono uscire insieme piuttosto che rimanere separati: la solitudine renderebbe non interessante anche lo spettacolo più gradito. Possiamo allora rappresentare la situazione come indicato in Tab.2.*

Questo gioco viene spesso indicato come un gioco di "coordinamento", nel senso che non esprime un vero e proprio conflitto. Si noti che, a differenza del dilemma del prigioniero, qui non esiste una soluzione che entrambi sceglierebbero potendo parlarsi, come era

[3] La forma esatta della funzione di utilità in questo esempio non ha particolare importanza: quello che è essenziale qui è l'utilità ordinale, ovvero come sono ordinate le diverse alternative.

↓ Lui Lei →	wrestling	balletto
wrestling	3,1	0,0
balletto	0,0	1,3

Tabella 2: La "battaglia dei sessi".

(NC, NC) nel caso del dilemma del prigioniero: i due hanno visioni diverse. Possiamo tuttavia osservare che sia (w, w) che (b, b) sono risultati ragionevoli. Prendiamo ad esempio (b, b). Lui potrebbe ragionare come segue. "Se sapessi che Lei è andata al balletto, è inutile che io vada a vedere il wrestling; a far che? Vado anch'io al balletto." E ovviamente la stessa cosa può pensare Lei. Questo però non risolve il problema, chiaramente, perché lo stesso ragionamento si applica al profilo (w, w)...

Esempio 3 (Votazioni). *Questo esempio vuole illustrare il vantaggio, in determinati consessi, del voto strategico rispetto al voto di opinione. Una commissione parlamentare è formata da tre persone (1, 2 e 3), che devono decidere sull'iter di due leggi, chiamiamole A e B. L'output della commissione può essere quello di far passare solo A, far passare solo B oppure nessuna delle due, con il che rimarrebbe in vigore lo status quo (indicato con N). Secondo i regolamenti istituzionali, il meccanismo è il seguente. Prima, viene votata una legge tra A e B; poi, quella vincente viene votata rispetto allo status quo. In ognuno dei due round di votazioni, passa la legge che riceve più voti. I tre commissari hanno le seguenti preferenze riguardo alle tre leggi. (A$\succ$ B indica che A è preferita a B.)*

1 $A \succ N \succ B$
2 $B \succ A \succ N$
3 $N \succ A \succ B$

Vediamo di analizzare cosa accade in questa situazione. Al primo round, se ognuno votasse secondo opinione, chiaramente A otterrebbe due voti e B uno, dunque passerebbe A. Analogamente, al secondo round, A otterrebbe due voti e N uno, per cui alla fine la legge A passerebbe l'esame della commissione. Ovviamente, questa situazione non rende contento il commissario 3, per il quale N era preferibile ad A. C'è qualche modo con cui 3 può tentare di ostacolare questo risultato? Beh, se 1 e 2 votano secondo la loro opinione, al primo round 3 può decidere di votare per B anziché per A: in questo modo passerebbe B, che però verrebbe sconfitto al secondo round, e così otterrebbe il suo scopo. È chiaro che a questo punto, proprio paventando questo fenomeno, anche 2 potrebbe decidere di comportarsi in modo difforme dalle proprie opinioni, e votare per A al primo round: tra A e N, per lui, è meglio A. In effetti, la situazione può analizzarsi in modo più sistematico come segue. Anzitutto osserviamo che al secondo round, certamente ognuno voterà secondo opinione: non c'è motivo di fare altrimenti. Dunque, se ognuno conosce

↓ A B →	testa	croce
testa	1,-1	-1,1
croce	-1,1	1,-1

Tabella 3: Testa o croce.

↓ A B →	falco	colomba
falco	-1,-1	10,0
colomba	0,10	5,5

Tabella 4: Falchi e colombe.

le preferenze degli altri, tutti sanno che se al primo round passa A, il risultato finale sarà A (perché al secondo round A batte N per 2-1), mentre se al primo round passa B, il risultato finale sarà N (perché al secondo round N batte B per 2-1). Dunque, al primo round in realtà i commissari non votano tra A e B, ma tra A e N. Quindi, a questo punto 1 e 2 voteranno in realtà per A (che loro preferiscono a N), e di conseguenza la conclusione razionale è che passerà A. Nel fare ciò, dunque, sia 2 che 3 al primo round non votano secondo opinione, ma in modo strategico.

Esempio 4 (Testa o croce). *A e B devono scrivere "testa" o "croce" su una lavagnetta. Se, voltando le lavagne, si scopre che hanno scritto la stessa cosa, B cede a A un euro. Altrimenti, A cede a B un euro. Identificando le utilità con i risultati monetari, possiamo rappresentare la situazione come indicato in Tab.3.*

Un'osservazione interessante è che in questo gioco, a differenza dei precedenti, la vincita di un giocatore corrisponde alla perdita dell'altro – in altre parole, quello che uno perde è vinto dall'altro. Per questo motivo, i giochi di questo tipo prendono il nome di *giochi a somma zero.*

Esempio 5 (Falchi e colombe). *Due animali si contendono una preda. Ciascuno si può comportare come falco (f) o colomba (c). A seconda del comportamento di entrambi, si hanno diverse situazioni finali. Se uno si comporta da falco e l'altro da colomba, chiaramente il falco ha la meglio, e si aggiudica l'intera preda (utilità pari a 10), lasciando all'altro le briciole (utilità 0). Se ambedue decidono di comportarsi da colomba, potranno spartirsi la preda (utilità pari a 5). La situazione in cui entrambi gli animali si comportano da falco è la peggiore di tutte, in quanto finiranno per farsi molto male (utilità -1) (Tabella 4).*

Abbiamo dunque visto alcuni esempi di giochi in forma strategica, e altri ancora ne vedremo. Prima di proseguire con la teoria, va sottolineato che esistono due diverse interpretazioni della rappresentazione di un gioco non cooperativo in forma strategica. Secondo la prima, a cui abbiamo già accennato, il gioco modella una situazione che ha luogo una e una sola volta. I giocatori non possono comunicare, e ognuno deve compiere la propria scelta senza conoscere quella degli altri. Non vi sono informazioni in base alle quali un giocatore può formarsi un'idea del comportamento degli altri giocatori.

Tuttavia questa interpretazione, benché appropriata in molti casi, può non essere la più adatta a esemplificare molti dei concetti-chiave della teoria dei giochi. Un'altra interpretazione è quella secondo la quale un giocatore *può* formarsi un'idea di quello che giocheranno i suoi avversari, ad esempio sulla base dell'osservazione del comportamento di un altro giocatore in situazioni precedenti, uguali o simili a quella in questione. In quest'ottica, il concetto di soluzione assume il significato di uno stato stazionario, a cui il sistema tende dopo un certo numero di volte che il gioco è stato effettuato. Questo ci porta a dover fare subito una precisazione, sottile ma importante. Se un determinato gioco viene giocato in realtà molte volte, analizzare una singola realizzazione di questo gioco attraverso un modello in forma strategica (come quello in Tab.1) è appropriato solo se non esistono *legami di tipo strategico* tra le diverse realizzazioni. Cosa vuol dire? Vuol dire che, anche se il gioco viene ripetuto altre volte, ciascun giocatore è interessato soltanto a massimizzare la propria utilità derivante da *quella* realizzazione, ovvero il suo comportamento è indipendente dal fatto che quel gioco sarà eventualmente ripetuto. Diversa sarebbe la situazione se, invece, un giocatore sacrificasse volontariamente la propria utilità oggi, ritenendo che questo tipo di comportamento gli possa riservare, in una successiva ripetizione del gioco, determinati vantaggi. In questo caso esisterebbe un legame strategico tra le diverse ripetizioni del gioco, e il semplice modello in Tab.1 non sarebbe più appropriato[4]. Dunque, anche se noi possiamo tener conto di come un giocatore si è comportato nel passato in situazioni analoghe, supporremo comunque che il suo comportamento sia sempre e solo mirato a massimizzare la propria utilità nell'attuale ripetizione del gioco.

3 Dominanza

La descrizione di un gioco comprende i vincoli con cui i giocatori si trovano a dover fare i conti, e include altresi' gli interessi dei giocatori (espressi dalla loro funzione di utilità), ma non specifica le azioni che i giocatori prenderanno. La *soluzione* di un gioco è una descrizione sistematica dei risultati che possono emergere in un determinato tipo di gioco, partendo dalle ipotesi di razionalità e intelligenza dei giocatori.

[4]Esiste una branca della teoria dei giochi che studia situazioni di questo tipo (che prendono appunto il nome di *giochi ripetuti*); noi non ce ne occuperemo.

Nel seguito tratteremo i concetti di soluzione più importanti e più conosciuti. Di ciascuno discuteremo le implicazioni di tipo concettuale. Intanto, vediamo alcune definizioni fondamentali.

Il concetto di *strategia dominante* è molto semplice e in accordo con l'intuizione. Però, come vedremo, consente di risolvere completamente un gioco in un numero limitato di casi.

Definition 1 *Dato un gioco in forma strategica, si consideri un giocatore i e due sue strategie a_k^i e a_h^i. Sia $\mathbf{a^{-i}}$ un vettore che specifica le strategie degli altri $N-1$ giocatori. Se*

$$u_i(a_k^i, \mathbf{a^{-i}}) \geq u_i(a_h^i, \mathbf{a^{-i}}) \quad \textit{per ogni} \quad \mathbf{a^{-i}} \tag{1}$$

$$u_i(a_k^i, \mathbf{\hat{a}^{-i}}) > u_i(a_h^i, \mathbf{\hat{a}^{-i}}) \quad \textit{per qualche} \quad \mathbf{\hat{a}^{-i}} \tag{2}$$

allora si dice che la strategia a_k^i domina debolmente *la strategia a_h^i (equivalentemente, che a_h^i* è debolmente dominata *da a_k^i). Invece, si dice che la strategia a_k^i* domina strettamente *la strategia a_h^i (equivalentemente, che a_h^i* è strettamente dominata *da a_k^i) se*

$$u_i(a_k^i, \mathbf{a^{-i}}) > u_i(a_h^i, \mathbf{a^{-i}}) \quad \textit{per ogni} \quad \mathbf{a^{-i}} \tag{3}$$

Se una strategia è dominata (debolmente o strettamente) da un'altra, diremo che questa strategia è dunque *dominata* (debolmente o strettamente). Una strategia che domina (debolmente o strettamente) *tutte* le altre si dice (debolmente o strettamente) *dominante*. Ovviamente, se esiste una strategia strettamente dominante, questa è unica. Possono invece esistere più strategie debolmente dominanti.

Se ciascun giocatore dispone di una strategia dominante, allora si dice che il gioco ha una soluzione dominante. Una strategia che non è dominata da nessun'altra si dice, appunto, *nondominata*.

Facciamo un esempio[5]. Si consideri il gioco in Tabella 5, in cui il giocatore 1 ha tre possibili strategie, e il giocatore 2 ne ha due. Andiamo a confrontare le strategie Alto e Centro per il giocatore 1. Come si può notare, qualunque sia la scelta del giocatore 2, a 1 non converrà mai giocare Alto, in quanto giocando Centro ottiene sempre e comunque di più. Dunque, la strategia Alto è una strategia strettamente dominata. Si noti che invece Centro e Basso sono strategie nondominate, ma nessuna delle due è dominante.

Dunque, in una situazione come quella del gioco in Tabella 5, un giocatore intelligente e razionale non giocherà mai la strategia Alto.

[5]Questo e molti altri esempi sono tratti dall'eccellente testo introduttivo di Colombo (2004).

↓ 1 2 →	Sinistra	Destra
Alto	3,2	2,6
Centro	4,4	3,3
Basso	6,5	1,3

Tabella 5: Un gioco risolvibile per eliminazione iterata.

↓ 1 2 →	L	C	R
T	4,5	1,7	5,6
M	3,4	2,5	5,4
B	2,5	1,1	7,0

Tabella 6: Un altro gioco risolvibile per eliminazione iterata.

Facciamo ora un'ipotesi ulteriore, apparentemente innocua ma profonda. Ossia, supponiamo non solo che ciascuno dei due giocatori sia intelligente e razionale, ma anche che ciascuno dei due sa che l'altro giocatore è intelligente e razionale.

Questa ipotesi consente di proseguire e portare alle estreme conseguenze il ragionamento già iniziato. Se infatti è vero che 1 non giocherà mai Alto, è anche vero che questo fatto è noto anche al giocatore 2. Dunque, 2 sa che 1 non giocherà mai Alto. Di fatto è come se il gioco si modificasse, cancellando la prima riga della tabella. Ma allora, a questo punto è evidente che nel gioco cosi' modificato compare una strategia strettamente dominata per il giocatore 2, vale a dire Destra: qualunque cosa faccia 1, per 2 si tratta di una scelta perdente. Ecco allora che aver ipotizzato che ciascun giocatore sa che l'altro è intelligente e razionale consente di concludere che anche Destra non verrà mai giocata. Cosi', il gioco si semplifica ulteriormente, e rimangono solo due righe e una colonna. A questo punto, non essendovi di fatto più alcuna scelta da compiere, tra Centro e Basso il giocatore 1 sceglierà ovviamente Basso (ossia, Centro è di nuovo una strategia strettamente dominata).

Si noti che applicando quanto visto al Dilemma del Prigioniero, si arriva dunque a stabilire immediatamente che (C, C) è la soluzione del gioco, in quanto C è una strategia strettamente dominante per ambedue i giocatori.

Il procedimento adotta si basa su un'assunzione molto semplice: che ciascuno dei due giocatori sappia che anche l'altro è intelligente e razionale. Tuttavia, vediamo con un esempio come si possa arrivare a conseguenze estreme proseguendo questo tipo di ragionamento. Si consideri il gioco in Tabella 6.

Ora, si verificano i seguenti eventi:

- Il giocatore 2 è razionale. Conseguenza: non giocherà mai R (in quanto è una strategia strettamente dominata da C)

↓ 1 2 →	L	R
U	100,100	1,101
D	99,x	0, -x

Tabella 7: Gioco che illustra i limiti dell'eliminazione iterata.

- Il giocatore 1 sa che 2 è razionale. Conseguenza: 1 sa che 2 non giocherà mai R, e quindi non giocherà mai D (strettamente dominata da M)
- Il giocatore 2 sa che 1 sa che 2 è razionale. Conseguenza: il giocatore 2 sa che 1 sa che 2 non giocherà R, quindi sa che 1 non giocherà mai D, e dunque 2 non giocherà mai L, che a questo punto è dominata da C
- Il giocatore 1 sa che 2 sa che 1 sa che 2 è razionale. Conseguenza: 1 sa che 2 sa che 1 sa che 2 non giocherà mai R, di conseguenza 1 sa che 2 sa che 1 non giocherà mai D, quindi 1 sa che 2 non giocherà mai L, e in definitiva la conclusione che 1 trae è che non sarebbe razionale giocare T, ossia a questo punto l'unica strategia razionale rimane M.
- Il giocatore 2 sa che 1 sa che 2 sa che 1 sa che 2 è razionale. Conseguenza: ripercorrendo l'intero ragionamento, ecco che appare evidente che anche 2 giunge alla stessa conclusione e giocherà C.

Il procedimento descritto in questo esempio prende il nome di *eliminazione iterata* (*delle strategie strettamente dominate*). Dunque, se tale procedimento consente di giungere ad una sola coppia di strategie, queste costituiscono la soluzione del gioco. Vale la pena osservare che questo concetto di soluzione investe soltanto confronti tra strategie *dello stesso* giocatore (a differenza di quanto vedremo nel §6).

In definitiva, nell'esempio visto, il profilo che sopravvive al procedimento di eliminazione iterata è (M, C), ma perché si possa arrivare a questa conclusione, è necessario ipotizzare l'esistenza di quella che si chiama *gerarchia di credenze*, relativamente alla razionalità dei giocatori. Questo, come si può vedere dall'esempio, richiede una serie di assunzioni che, man mano che l'ordine di iterazione aumenta, appaiono sempre meno sostenibili.

Anche senza reiterare molte volte il ragionamento fatto, esistono alcuni aspetti molto delicati. Si consideri quest'altro esempio, in Tabella 7.

È facile osservare che, indipendentemente dal valore di x, D è dominata per il primo giocatore, per cui il secondo giocherà senz'altro R e dunque la soluzione del gioco è (U, R). Chiediamoci però se sia davvero "irrazionale" ritenere che l'esito del gioco possa dipendere dal valore di x. Se i numeri nella Tabella 7 sono importi monetari espressi in euro, e ad

$\downarrow 1$	$2 \rightarrow$	L	R
U		3,2	2,2
M		1,1	0,0
D		0,0	1,1

Tabella 8: Gioco che illustra i limiti dell'eliminazione iterata basata sulla dominanza debole.

esempio $x = 1000000$, ecco che la situazione del giocatore 2 appare piuttosto delicata. Infatti, se 2 è davvero sicurissimo che 1 sia razionale, giocherà R, in modo da guadagnare 101 euro anziché 100. Ma non è poi così impensabile che invece 1 giochi U, anche fosse solo per errore, dal momento che per 1 la differenza tra giocare U e D è davvero piccola; ma in questo caso, le conseguenze per 2 sarebbero enormi. Dunque, a ogni buon conto, 2 può decidere di giocare L, che peraltro gli frutterebbe un grosso guadagno nel caso il giocatore 1 si "sbagli".

Dunque, un limite del concetto di razionalità utilizzato nella teoria dei giochi è che, portato all'estremo, produce situazioni che non corrispondono alla realtà, o quanto meno a quello che realisticamente è pensabile che accada in circostanze analoghe. Questa critica al ruolo positivo della teoria dei giochi però non vuol dire che la teoria non sia valida, ovviamente. Dal punto di vista prescrittivo, la teoria dei giochi indica quello che *sarebbe* il comportamento da seguire se i giocatori – come capita nella maggior parte dei casi di interesse reale – possono essere assimilati a decisori razionali; non implica che tale comportamento vada *sempre* seguito[6].

In questo paragrafo abbiamo basato l'eliminazione sul concetto di strategia *strettamente* dominata. Tuttavia, le stesse identiche considerazioni si sarebbero potute ripetere nel caso di dominanza *debole*: di nuovo, se una strategia $a^i_k \in A^i$ è debolmente dominata da una strategia $a^i_h \in A^i$, per il giocatore i non vi è alcun motivo razionale per giocare a^i_k in luogo di a^i_h. Essendo questo un concetto più ampio del precedente, ci si può attendere che la dominanza debole consenta di eliminare un maggior numero di strategie rispetto alla dominanza stretta. Tuttavia, ci limitiamo qui a osservare con un esempio un possibile difetto di questo concetto.

Si consideri l'esempio in Tabella 8. Procedendo come al solito, notiamo che, per 1, D è strettamente dominata da U, e dunque può essere eliminata. A questo punto R per 2 è debolmente dominata da L, e può quindi essere eliminata. Quindi, U domina strettamente

[6]Colombo (2004) fa un pregnante parallelo con un libro sugli scacchi. Anche se io conoscessi le tecniche più sofisticate per vincere a scacchi, non è detto che mi convenga applicarle contro chiunque; ad esempio, se ho davanti a me un principiante, probabilmente mi sarà più semplice usare tecniche meno sofisticate ma abbastanza astute da consentirmi di vincere.

M per 1 e in definitiva il profilo che sopravvive all'eliminazione iterata è (U, L).

Si poteva però anche iniziare osservando che M è strettamente dominata da U, e dunque può essere eliminata. A quel punto L viene a essere debolmente dominata da R, e può essere eliminata. Infine, D viene eliminata perché dominata strettamente da U, e in definitiva rimane il profilo (U, R).

In effetti, osserviamo che se, nel primo caso, dopo D per 1 avessimo eliminato M ancora per 1, saremmo rimasti con due possibili profili, (U, L) e (U, R). Quindi si ha che *il profilo che sopravvive alla eliminazione iterata delle strategie debolmente dominate può dipendere dall' ordine con cui sono condotte le eliminazioni.* È facile invece mostrare che questa circostanza non può verificarsi nel caso delle strategie strettamente dominate, ossia in quel caso l'ordine di eliminazione non ha nessuna importanza.

4 Strategie miste

La Definizione 1 considera dominata una strategia se ne esiste almeno un'altra, per lo stesso giocatore, che dà luogo sempre a un valore di utilità non minore (e in almeno un caso, strettamente maggiore). Vediamo ora un'interessante (e importante) definizione alternativa di strategia strettamente dominata, che nasce da un approccio diverso. Per semplicità lo illustriamo nel caso di due soli giocatori, ma la definizione ha validità assolutamente generale.

Supponiamo che un giocatore abbia un'idea della probabilità con cui l'altro giocatore giocherà le sue varie strategie. Ossia, supponiamo che lui/lei assegni una probabilità p_j al fatto che il giocatore 2 scelga la strategia b_j. Se 1 sceglie di giocare a^i_k, la sua utilità attesa sarà

$$U_1(a^i_k) = p_1 u_1(a^i_k, b_1) + p_2 u_1(a^i_k, b_2) + \ldots + p_m u_1(a^i_k, b_m)$$

Un giocatore razionale tenderà a massimizzare la propria utilità attesa, ossia sceglierà quella strategia a_k tale che $U(a_k) = \max_{i \in A} U(a^i_k)$. Chiaramente, se le probabilità p_j fossero note, il problema decisionale per il giocatore 1 sarebbe facilmente risolubile: basterebbe calcolare l'utilità attesa di ciascuna possibile strategia a^i_k, e scegliere poi la strategia cui corrisponde l'utilità attesa più alta. Il fatto che le probabilità p_j non siano note a priori giustifica lo sforzo che è stato fatto, nel corso degli anni, di identificare comunque strategie "razionali" particolari (appunto, le soluzioni del gioco).

Possiamo allora dare la seguente definizione alternativa:

DEFINITION 2 *Una strategia $a^i_k \in A^i$ è strettamente dominata se non esiste alcun vettore di probabilità relativo alle scelte degli altri giocatori per cui giocare a^i_k massimizza l'utilità attesa del giocatore i.*

$\downarrow$ 1 $\quad$ 2 $\rightarrow$	l	c	r
U	4,10	3,0	1,3
D	0,0	2,10	10,3

Tabella 9: Gioco che illustra il confronto tra le due definizioni di dominanza.

Ovviamente, ci si può chiedere se le due definizioni viste finora siano o meno equivalenti. Per scoprirlo, consideriamo l'esempio in Tabella 9.

È facile vedere che, applicando la Definizione 1, non vi sono strategie dominate, per nessuno dei due giocatori. Applichiamo invece la Definizione 2. Supponiamo cioè che il giocatore 2 attribuisca una probabilità p al fatto che 1 giochi U, e dunque $1-p$ al fatto che giochi D. L'utilità attesa di 2 associata alle tre possibili strategie l, c e r, è pari a $10p$, $10(1-p)$ e 3 rispettivamente. Dunque, se $p < 0.5$ la strategia ottima per 2 è giocare c, se $p > 0.5$ è giocare l, mentre per $p = 0.5$ le strategie l e c sono equivalenti, ed entrambe sono strettamente migliori di r. Si vede quindi come per nessun valore di p al giocatore 2 converrà giocare r, dunque, in base alla definizione data in questo capitolo, r è una strategia strettamente dominata per il giocatore 2.

Apparentemente vi è quindi una discrepanza tra le due definizioni di strategia dominata. La Definizione 1 infatti richiede di confrontare tra loro strategie dello stesso giocatore, una strategia risulta dominata se ce n'è almeno un'altra che risulta migliore, qualunque sia la scelta dell'altro giocatore. Ora invece stiamo dicendo (Definizione 2) che una strategia è dominata se in nessun caso (ossia, per nessuna strategia dell'altro giocatore) massimizza l'utilità attesa di quel giocatore. In realtà, questa discrepanza è solo apparente, ma occorre estendere opportunamente il concetto di strategia.

DEFINITION 3 *Dato l'insieme di azioni A^i a disposizione del giocatore i, una* strategia mista *per il giocatore i è una distribuzione di probabilità su tale insieme. Ossia, una strategia mista è un vettore di probabilità $(p_1^i, p_2^i, \ldots, p_{n_i}^i)$ sulle possibili azioni che il giocatore può intraprendere.*

L'interpretazione letterale di una strategia mista prevede dunque che un giocatore prenda la sua decisione introducendo deliberatamente un elemento stocastico, e questo può sembrare irrazionale o addirittura bizzarro. In realtà esistono interpretazioni molto più sofisticate (e ragionevoli), anche se non ce ne occuperemo. Comunque, se accettiamo l'interpretazione per cui un gioco modella una situazione che può aver luogo molte volte (senza legami strategici tra una ripetizione e l'altra), la strategia mista può essere interpretata come la frequenza con cui il giocatore gioca le varie strategie, che chiameremo *strategie pure*, per distinguerle da quelle miste (chiaramente le strategie pure possono essere viste come un caso particolare di strategie miste).

Dunque, la Definizione 2 può enunciarsi dicendo che una strategia a_k è dominata se, qualunque sia la strategia mista giocata dall'altro giocatore, a_k non massimizza l'utilità attesa di quel giocatore. Come si riconcilia questa definizione con la Definizione 1? Noi non ne diamo una dimostrazione generale, però limitiamoci a osservare che nel nostro esempio, una volta introdotte le strategie miste, r risulta dominata anche rispetto alla prima definizione. Infatti, consideriamo la seguente strategia mista per 2: giocare l con probabilità q e c con probabilità $1-q$ (e dunque r con probabilità 0). Se 1 gioca U, l'utilità attesa di 2 è $10q$; se 1 invece gioca D, l'utilità attesa di 2 è $10(1-q)$. Ricordando che l'utilità attesa di r era 3, indipendentemente dalla giocata di 1, ecco che la strategia mista vista domina la strategia pura r per qualsiasi valore di q compreso fra 0.3 e 0.7: ecco dunque una strategia (benché mista) che domina la strategia pura r.

A questo punto, essendo giunti alla conclusione che r è una strategia dominata, possiamo procedere con l'eliminazione iterata, al termine della quale sopravviverà solo la coppia di strategie pure (U, l). È interessante notare che alla fine l'equilibrio si ha in strategie pure, ma il fatto di aver esteso l'attenzione alle strategie miste ha consentito di giungere a una conclusione che non sarebbe stata altrimenti possibile.

5 Comunicazione tra i giocatori

Una delle classiche assunzioni nella teoria dei giochi è che i giocatori non possano comunicare tra loro, e dunque debbano compiere le proprie scelte strategiche senza conoscere le decisioni degli altri giocatori. Come cambia lo scenario se invece ammettiamo, come è possibile che sia, che i giocatori possano comunicare prima che il gioco abbia luogo?

Quello a cui occorre fare attenzione è se, dopo che i giocatori hanno comunicato, è ancora possibile modellare il problema decisionale per mezzo dello stesso gioco.

Un esempio significativo è costituito dal dilemma del prigioniero. Supponiamo che i due individui possano parlarsi prima dell'interrogatorio. Sembrerebbe plausibile supporre che i due si accordino per non confessare. Analizziamo il ragionamento che potrebbe fare ciascuno dei due giocatori. "Se il mio collega tiene fede alla parola data, sarò condannato a 3 anni di carcere, mentre ne prenderei solo uno confessando. D'altra parte, se lui non tiene fede alla promessa e io si', io vado in carcere per 25 anni mentre lui se la cava con un anno solo. Ma allora chi me lo fa fare a scagionarlo se qualunque cosa lui faccia, a me conviene confessare?". In altri termini, la promessa reciproca di non confessare non è credibile: entrambi confesseranno. Dunque, in questo gioco la comunicazione non vincolante non sortisce nessun effetto. Questa è una conclusione che si può trarre ogni qual volta ciascun giocatore ha una strategia strettamente dominante (come era C per

↓ 1 2 →	C	L
C	9,9	0,8
L	8,0	7,7

Tabella 10: Caccia al cervo.

ognuno dei due in questo caso).

Ora, il punto-chiave della questione è capire se il fatto di contrarre un obbligo da parte di ciascun giocatore (ossia, la promessa di non confessare) è visto come un fatto vincolante o meno. Supponiamo cioè che per il primo prigioniero il rispetto della parola data sia una questione di onore, che vale assai più degli anni di carcere in meno che potrebbe conseguire confessando. Questo equivale a supporre che l'utilità $u_1(3,3)$ sia per il primo giocatore superiore a $u_1(1,25)$ e analogamente $u_1(25,1) > u_1(10,10)$. Discorso simmetrico potrebbe farsi anche per il secondo giocatore. Ma allora il gioco non sarebbe più quello raffigurato in Tabella 1, bensì un altro, in cui ora la strategia (c,c) risulta essere strettamente dominata. Invece, (nc,nc) risulta non dominata[7].

Dunque, in questo caso l'effetto della comunicazione tra i giocatori avrebbe l'effetto di modificare la struttura stessa del gioco (e quindi la sua possibile soluzione). Se invece noi supponiamo che il tener fede alla parola data non rivesta un particolare valore in sé, possiamo chiederci se la mera possibilità di avere uno sconto di pena è sufficiente ai due giocatori per scegliere (NC,NC). In questo caso, la struttura del gioco non viene alterata. Si parla in questi casi di comunicazione non vincolante o cheap talk. I due giocatori sono cioè liberi di parlarsi prima del gioco; al momento di giocare sono però liberi di scegliere la strategia che vogliono, ossia, per essere più precisi, il rispetto o meno della parola data non altera i payoff di ciascun giocatore.

Da questo esempio sembrerebbe allora che la comunicazione non vincolante, per avere qualche effetto sulla soluzione del gioco, debba modificare la struttura del gioco stesso. In effetti non è cosi'. La questione è se il comportamento negoziale di un giocatore rivela o meno le sue reali intenzioni.

Un esempio molto illuminante è il gioco Caccia al Cervo (Tabella 10). La classica storia – non molto animalista – è la seguente. Due cacciatori vanno per cacciare un cervo. Questo è però un risultato che riescono a conseguire solo con la collaborazione reciproca: ognuno ha precisi compiti, e solo se ognuno tiene fede ai propri compiti, il cervo verrà cacciato. Se comunque i due sono collaborativi, allora riusciranno senz'altro a

[7] Si noti che non stiamo tirando in ballo questioni legate a possibili conseguenze future di una decisione presa adesso. Ossia, restando nella metafora del prigioniero, si potrebbe anche pensare che un prigioniero decida di non confessare perché teme che, una volta fuori di prigione, possa subire ritorsioni da parte di amici o parenti dell'altro giocatore. Questo fattore entrerebbe però allora anche nella versione originaria del dilemma del prigioniero, e dunque di nuovo il gioco sarebbe diverso.

$\downarrow 1 \quad 2 \rightarrow$	C	L
C	9,9	0,6
L	6,0	7,7

Tabella 11: Caccia al cervo con utilità modificate.

cacciare un cervo, ottenendo ambedue quello che considerano il risultato migliore (utilità 9 per ciascuno). Ciascuno dei due può però decidere di dedicarsi a cacciare lepri; questa attività è un po' meno soddisfacente: se ambedue lasciano perdere i cervi e si mettono a cacciare lepri conseguono un'utilità pari a 7 per ciascuno. Tuttavia, se uno dei due continua a cacciare il cervo mentre l'altro passa alle lepri, il primo non otterrà niente, purtroppo per lui (utilità 0), mentre l'altro ne trarrà giovamento, non avendo concorrenti (utilità 8).

Sembra naturale supporre che, avendo modo di parlarsi, i due si accordino per cacciare il cervo, ossia il profilo (C, C). Ma uno dei due giocatori, diciamo 1, potrebbe ora interrogarsi sulle reali intenzioni di 2. Infatti, 1 potrebbe fare il seguente ragionamento:"Se 2 ha davvero intenzione di giocare C, ha interesse a indurmi a giocare anch'io C? Certo: otterrebbe 9 invece di 0. E se avesse invece intenzione di giocare L? Beh, anche in questo caso avrebbe tutto l'interesse a farmi giocare C, perché cosi' non avrebbe concorrenti nella caccia alla lepre (guadagnando 8 invece di 7). Dunque il fatto che mi voglia convincere a giocare C non mi dà alcuna garanzia sul fatto che lui intenda davvero giocare C. Dunque, giocare o meno C sarà una scelta mia, ma non certo perché me lo ha chiesto 2."

Dunque si vede che anche in questo caso la comunicazione non vincolante non riveste un ruolo decisivo nella determinazione della soluzione del gioco. Diciamo, anche qui, che si tratterebbe di capire il rapporto esistente tra i due giocatori, e dunque se violare la parola data ha un significato o no: comunque, si tratta di elementi che non fanno parte della modellazione del gioco. È interessante osservare che se invece dei payoff in figura 10 si usassero quelli in figura 11[8], le conclusioni sarebbero diverse. Infatti in questo caso, se i due si accordano per cacciare il cervo, rivelano le loro reali intenzioni. Ad esempio, se 2 avesse in realtà intenzione di giocare L, perché mai dovrebbe cercare di convincere 1 a giocare C? Andrebbe contro i propri interessi, e dunque è razionale ritenere che 2 intenda veramente cacciare il cervo.

Quello che occorre sottolineare è che dunque, in alcuni casi, l'effettivo comportamento dei giocatori può dipendere da elementi non esplicitamente modellati (come il rapporto di fiducia tra i giocatori, come si è detto), che non c'entrano con il concetto di razionalità.

[8]Ossia supponiamo stavolta che i due cacciatori hanno un vantaggio a cooperare anche se si dedicano entrambi alle lepri.

6 Equilibrio di Nash

Il concetto di soluzione forse più significativo e importante nella teoria dei giochi non cooperativi è quello di *equilibrio* (di Nash). Questo concetto modella, in sostanza, una sorta di "stato stazionario", rispetto al quale nessun giocatore ha interesse a deviare unilateralmente. La teoria dei giochi non entra nel merito dei meccanismi con cui uno raggiunge questo stato.

Inizialmente considereremo soltanto le strategie pure, successivamente estenderemo l'analisi a considerare anche strategie miste.

6.1 Strategie pure

Per ora considereremo soltanto strategie pure, dunque, dato un gioco in forma strategica, un profilo $a \in A$ di azioni è una N-pla di strategie $a_1, a_2, \ldots, a_N$.

Definition 4 *Un profilo* $\bar{\mathbf{a}} = \{\bar{a}^1, \bar{a}^2, \ldots, \bar{a}^N\}$ *è un* equilibrio di Nash *se per ogni giocatore i si ha*

$$u_i(\bar{a}^i, \bar{\mathbf{a}}^{-\mathbf{i}}) \geq u_i(a^i, \bar{\mathbf{a}}^{-\mathbf{i}}) \quad \textit{per ogni} \quad a^i \in A^i \tag{4}$$

dove $\bar{\mathbf{a}}^{-\mathbf{i}}$ indica le strategie degli altri $N-1$ giocatori.

Dunque, se $\bar{\mathbf{a}}$ è un equilibrio di Nash, ciascun giocatore i preferisce l'azione $\bar{a}^i$ a qualunque altra, supponendo che tutti gli altri giocatori giochino $\bar{a}^j$. In altre parole, nessun giocatore ha alcun motivo di deviare rispetto al profilo di azioni di equilibrio.

Lo stesso concetto può essere espresso in modo lievemente diverso, come segue. Si consideri un profilo di azioni per gli altri $N-1$ giocatori $\bar{\mathbf{a}}^{-\mathbf{i}} \in A^{-i}$, e sia

$$B_i(\mathbf{a}^{-\mathbf{i}}) = \{a^i_k \in A^i : u_i(a^i_k, \mathbf{a}^{-\mathbf{i}}) \geq u_i(a^i_h, \mathbf{a}^{-\mathbf{i}}) \quad \text{per ogni } a^i_h \in A^i\}$$

L'insieme $B_i(\mathbf{a}^{-\mathbf{i}})$ rappresenta l'insieme (spesso costiutuito da una singola azione) delle *migliori risposte* che il giocatore i può dare alla scelta $\mathbf{a}^{-\mathbf{i}}$ effettuata dagli altri giocatori. Un equilibrio di Nash è allora un profilo $\bar{\mathbf{a}}$ tale che

$$\bar{a}^i \in B_i(\mathbf{a}^{-\mathbf{i}})$$

Vediamo cosa si può dire degli equilibri di Nash per i giochi introdotti nel §2. Nel dilemma del prigioniero (Esempio 1), come abbiamo già osservato, al giocatore 1, qualunque cosa faccia 2, conviene confessare, e stessa cosa accade per B. Dunque il profilo $a^* = (C, C)$ è un equilibrio di Nash.

Riprendendo invece la battaglia dei sessi (Esempio 2), osserviamo che il gioco presenta due equilibri di Nash: (b, b) e (w, w), come pure due equilibri di Nash esistono nel gioco

Falchi e Colombe (Esempio 5), ossia (f, c) e (c, f). Una situazione diversa si ha invece nel gioco Testa o Croce (Es.4): in tal caso è facile osservare che il gioco *non ha alcun equilibrio di Nash.*

In questi esempi, determinare l'esistenza o meno di (almeno) un equilibrio di Nash è, come abbiamo visto, abbastanza semplice. Tuttavia, anche da questi semplici esempi emerge il fatto che non sempre un equilibrio di Nash costituito da strategie pure esiste. Esistono teoremi che danno condizioni sufficienti affinché un gioco ammetta un equilibrio di Nash in strategie pure. Alcuni di questi teoremi non sono particolarmente intricati, ma fanno riferimento a situazioni abbastanza particolari e non ce ne occuperemo.

6.1.1 Giochi a somma zero

In generale, non si può dunque dire molto sull'esistenza o meno di equilibri di Nash in strategie pure, e occorre ragionare per classi di giochi. Una classe per la quale la caratterizzazione degli equilibri di Nash può essere fatta in modo soddisfacente è quella dei giochi *strettamente competitivi.* Questi sono giochi con due soli giocatori (indicati come "1" e "2"), in cui un risultato positivo per un giocatore corrisponde necessariamente a uno negativo per l'altro, ovvero, dati due profili qualsiasi a e b, si ha che $a \succ_1 b$ (e dunque $u_1(a) \geq u_1(b)$) se e solo se $a \prec_2 b$ (e dunque $u_2(a) \leq u_2(b)$). Tali giochi sono anche detti *a somma zero*, in quanto si può assumere che $u_1(a) = -u_2(a)$, ossia quello che viene "vinto" da un giocatore è perso dall'altro (un po' come nei giochi d'azzardo).

Nei giochi a somma zero possiamo la rappresentazione del gioco in forma strategia può semplificarsi, perché per ogni coppia di azioni (x, y) basterà indicare l'utilità di uno solo dei due giocatori, ad esempio 1 (vedi Tabella 6).

Supponiamo di essere il giocatore 1. Nel determinare la strategia più opportuna, un atteggiamento di tipo pessimistico è quello di prevedere che, data una azione $x \in A_1$, il giocatore 2 risponda sempre con l'azione per me più dannosa (e dunque per lui/lei più redditizia). Se cioè io gioco x, la cosa per me peggiore è che l'altro giocatore giochi l'azione $y(x)$, tale che

$$u_1(x, y(x)) = \min_{y \in A_2} u_1(x, y) \tag{5}$$

Seguendo questo ragionamento, mi converrà allora giocare quella azione che massimizza il mio "payoff del caso peggiore", ovvero, tra tutti i minimi del tipo (5), sceglierò quell'azione x^* tale che

$$\min_{y \in A_2} u_1(x^*, y) = \max_{x \in A_1} \{\min_{y \in A_2} u_1(x, y)\} \tag{6}$$

L'azione x^* massimizza il minimo risultato che ho la garanzia di ottenere, e per questo motivo prende il nome di *maxminimizer* per il giocatore 1.

Ovviamente, lo stesso tipo di ragionamento può essere fatto dall'altro giocatore, il che conduce a definire un maxminimizer y^* anche per il giocatore 2:

$$\min_{x\in A_1} u_2(x, y^*) = \max_{y\in A_2}\{\min_{x\in A_1} u_2(x, y)\} \tag{7}$$

Dal momento che il gioco è a somma zero, $u_2(x, y) = -u_1(x, y)$, il che consente di dimostrare in modo abbastanza immediato il seguente lemma:

Teorema 1 *Dato un gioco a somma zero, in cui A_1 e A_2 sono gli insiemi di azioni dei due giocatori, si ha*

$$\max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1} u_2(x, y) = -\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x, y) \tag{8}$$

e il massimo a sinistra e il minimo a destra nella (8) si ottengono per lo stesso $y^* \in A_2$.

Dim.– Basta osservare che

$$\begin{aligned}\max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1} u_2(x, y) &=\\ -\min_{y\in A_2}(\min_{x\in A_1} u_2(x, y)) &=\\ -\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1}(-u_2(x, y)) &=\\ -\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x, y)&\end{aligned}$$

□

Vogliamo allora indagare le condizioni sotto le quali un gioco a somma zero ammette un equilibrio di Nash. Il seguente teorema esprime un risultato molto significativo.

Teorema 2 *Dato un gioco a somma zero, se (x^*, y^*) è un equilibrio di Nash, allora:*

a) x^* è un maxminimizer per 1 e y^* lo è per 2.

b) si ha

$$\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y) = u_1(x^*, y^*) \tag{9}$$

Dim.– Se (x^*, y^*) è un equilibrio di Nash, dalla definizione si ha che $u_2(x^*, y^*) \geq u_2(x^*, y)$ per tutti gli $y \in A_2$, e poiché $u_2 = -u_1$, si ha $u_1(x^*, y^*) \leq u_1(x^*, y)$. Dunque

$$u_1(x^*, y^*) = \min_y u_1(x^*, y) \leq \max_x \min_y u_1(x, y) \tag{10}$$

Sempre dalla definizione di equilibrio di Nash, $u_1(x^*, y^*) \geq u_1(x, y^*)$ per tutti gli $x \in A_1$, e a sua volta $u_1(x, y^*) \geq \min_y u_1(x, y)$ per tutti gli x, per cui $u_1(x^*, y^*) \geq \min_y u_1(x, y)$ per tutti gli x, da cui

$$u_1(x^*, y^*) \geq \max_x \min_y u_1(x, y) \tag{11}$$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	5	4	3	4
x_2	6	-2	1	2
x_3	3	3	2	2

Tabella 12: Esempio di gioco a somma zero.

da (10) e (11) discende che

$$u_1(x^*, y^*) = \max_x \min_y u_1(x, y) \tag{12}$$

e dunque x^* è un maxminimizer per 1. Simmetricamente si può dimostrare che y^* è un maxminimizer per 2, e questo completa il punto (a). Per quanto concerne (b), si osservi che siccome y^* è un maxminimizer per 2, $u_2(x^*, y^*) = \max_y \min_x u_2(x, y)$, e quindi

$$u_1(x^*, y^*) = -\max_y \min_x u_2(x, y)$$

da cui, applicando il Teorema 1:

$$= \min_y \max_x u_1(x, y)$$

quest'ultima, con la (12), consente dunque di riconoscere che

$$u_1(x^*, y^*) = \max_x \min_y u_1(x, y) = \min_x \max_y u_1(x, y)$$

□

Si noti che il punto (b) di questo teorema implica che se esistono più equilibri di Nash, questi hanno tutti gli stessi payoff (dovendo comunque valere la (9)).

Esempio 6 *Si consideri il gioco in tabella 12, in cui i numeri indicano le utilità del giocatore 1. Come si può verificare, (x_1, y_3) è un equilibrio di Nash: giocare diversamente, può far rischiare al giocatore 1 di conseguire un'utilità inferiore a 3 e al giocatore 2 un'utilità inferiore a -3. Come previsto dal Teorema 2, si ha in effetti che*

$$u_1(x_1, y_3) = \max_x \min_y u_1(x, y)$$

e inoltre

$$u_1(x_1, y_3) = \min_y \max_x u_1(x, y)$$

ossia, x_1 e y_3 sono maxminimizer.

Dunque, se un equilibrio di Nash esiste, è costituito da una coppia di maxminimizer. Viene da chiedersi se è vero anche il viceversa: ossia, se prendiamo una coppia di maxminimizers, questi costituiscono un equilibrio di Nash? In generale, no. Si riprenda ad esempio il gioco Testa o Croce. In questo gioco, sia T che C (per ambedue i giocatori) sono maxminimizers, ma non c'è equilibrio di Nash. In effetti, si ha che $\max_x \min_y u_1(x, y) = -1$, mentre $\min_y \max_x u_1(x, y) = 1$. Dal Teorema 2, discende appunto che non può esserci equilibrio di Nash.

Si noti che l'espressione (9) mostra che se, in un gioco a somma zero, esiste un equilibrio di Nash, la minima vincita che 1 può garantirsi supponendo che 2 risponda sempre in modo da danneggiarlo (logica pessimistica) coincide con quella che 2 può conseguire ragionando con la stessa logica pessimistica. Questo non è sempre vero, e ci si può chiedere infatti che relazione intercorre tra i due valori in giochi più generali. Il conto è abbastanza semplice, infatti si ha ovviamente $u_1(x', y) \leq \max_x u_1(x, y)$ per qualsiasi $y \in A_2$, e dunque anche

$$\min_y u_1(x', y) \leq \min_y \max_x u_1(x, y)$$

e siccome questa vale chiunque sia $x' \in A_1$, si può dunque concludere che in un generico gioco con due giocatori,

$$\max_x \min_y u_1(x, y) \leq \min_y \max_x u_1(x, y)$$

Dunque, non basta che x^* e y^* siano maxminimizer perché costituiscano un equilibrio di Nash. Tuttavia, il Teorema 2 ci dice che per cercare equilibri di Nash basta cercare tra le coppie di maxminimizer. Inoltre, possiamo mostrare un risultato che costituisce il viceversa del Teorema 2: *se* equilibri di Nash esistono, allora ciascuna coppia di maximinimizer ne costituisce uno.

TEOREMA 3 *Se un gioco a somma zero ammette equilibri di Nash, x^* è un maximinimizer per 1, e y^* è un maximinimizer per 2, allora (x^*, y^*) è un equilibrio di Nash.*

Dim.– Se esiste un equilibrio di Nash, abbiamo visto che dunque

$$\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_x \max_y u_1(x, y)$$

e poniamo tale valore pari a v^*. Dal Teorema 1, si ha quindi che

$$\max_y \min_x u_2(x, y) = -v^*$$

Siccome x^* è un maxminimizer per 1, si ha che

$$u_1(x^*, y) \geq v^* \tag{13}$$

per tutti gli $y \in A_2$, mentre simmetricamente siccome y^* è un maxminimizer per 2, si ha che

$$u_2(x, y^*) \geq -v^* \tag{14}$$

per tutti gli $x \in A_1$. Ora, ponendo $y = y^*$ nella (13) e $x = x^*$ nella (14), si ottengono rispettivamente

$$\begin{aligned} u_1(x^*, y^*) &\geq v^* \\ u_2(x^*, y^*) &\geq -v^* \end{aligned}$$

da cui, essendo $u_2(x^*, y^*) = -u_1(x^*, y^*)$, discende che $u_1(x^*, y^*) = v^*$. Dunque, dalla (14), si ha

$$-u_1(x, y^*) = u_2(x, y^*) \geq -u_1(x^*, y^*) \tag{15}$$

e in definitiva

$$u_1(x, y^*) \leq u_1(x^*, y^*) \tag{16}$$

ossia, effettuando una discussione del tutto simmetrica per u_2, si ha che (x^*, y^*) è un equilibrio di Nash. $\square$

6.2 Equilibri di Nash in strategie miste

Il discorso svolto sugli equilibri di Nash cambia sostanzialmente se allarghiamo il nostro orizzonte di interesse a includere anche le strategie miste. Supponiamo cioè che ciascun giocatore abbia, al solito, un numero finito di strategie pure a propria disposizione, ma possa decidere di attuare una qualunque strategia mista definita su di esse.

Nel seguito consideriamo cioè un profilo di strategie miste $p^1, p^2, \ldots, p^N$, in cui $p^i = (p^i_1, p^i_2, \ldots, p^i_{n_i})$ descrive la strategia mista del giocatore i. Con riferimento al giocatore i, indicheremo con $\mathbf{p^{-i}} = [p^1, p^2, p^{i-1}, p^{i+1}, \ldots, p^N]$ il profilo delle strategie degli altri $N-1$ giocatori. Il *supporto* di p^i è l'insieme delle strategie pure rappresentate in p^i, ossia l'insieme di strategie pure $a^i_k \in A^i$ tali che $p^i_k > 0$. Infine, indichiamo con $\mathcal{P}^i$ l'insieme di tutte le possibili strategie miste del giocatore i.

L'utilità attesa associata alla startegia mista p^i del giocatore i a fronte delle altre $N-1$ strategie $\mathbf{p^{-i}}$, può esprimersi come

$$U_i(p^i, \mathbf{p^{-i}}) = p^i_1 u_i(a^i_1, \mathbf{p^{-i}}) + p^i_2 u_i(a^i_2, \mathbf{p^{-i}}) + \ldots + p^i_{n_i} u_i(a^i_{n_i}, \mathbf{p^{-i}})$$

Il concetto di equilibrio di Nash in strategie miste estende quello visto in strategie pure. Come prima, dato un profilo $\mathbf{p^{-i}}$ di strategie miste di tutti i giocatori tranne i, definiamo l'insieme delle migliori risposte del giocatore i:

$$B_i(\mathbf{p^{-i}}) = \{p^i : U_i(p^i, \mathbf{p^{-i}}) \geq U_i(\hat{p}^i, \mathbf{p^{-i}}) \quad \text{per ogni } \hat{p}^i \in \mathcal{P}^i\}$$

dove si è indicato con $U_i(p^i, \mathbf{p^{-i}})$ l'utilità attesa per i derivante dal profilo di strategie miste $(p^i, \mathbf{p^{-i}})$. In perfetta analogia col caso delle strategie pure, un equilibrio di Nash è allora un profilo $p^{*1}, p^{*2}, \ldots, p^{*N}$ tale che, per ogni giocatore i, si ha

$$p^{*i} \in B_i(\mathbf{p^{*-i}})$$

Il risultato più importante, che diamo senza dimostrazione, è il seguente.

TEOREMA 4 *Qualsiasi gioco in cui ogni giocatore ha un numero finito di strategie, ammette almeno un equilibrio di Nash in strategie miste.*

L'importanza di questo teorema è evidente: anche giochi come Testa o Croce, che non ammettono equilibri di Nash in strategie pure, ne hanno sicuramente almeno uno in strategie miste. Inoltre, è possibile che un gioco possieda più equilibri, alcuni in strategie pure e altri in strategie miste.

Da un punto di vista pratico, occorre però essere in grado di calcolare questi equilibri. A questo proposito, vale il seguente fondamentale risultato.

TEOREMA 5 *Si consideri un profilo di strategie miste $p^1, p^2, \ldots, p^N$. Questo costituisce un equilibrio di Nash se e solo se ogni strategia pura nel supporto di p^i è una miglior risposta a $\mathbf{p^{-i}}$.*

Dim.– (solo se.) Sia $p^1, p^2, \ldots, p^N$ un equilibrio di Nash, e supponiamo per assurdo che $a_k \in A^i$ faccia parte del supporto di p^i, ma che non sia una miglior risposta a $\mathbf{p^{-i}}$. Osservando che l'espressione dell'utilità attesa è lineare rispetto alle probabilità, possiamo allora decrementare la probabilità p^i_k di a_k in p^i a favore di un'azione che sia invece una miglior risposta a $\mathbf{p^{-i}}$: ossia, p^i non sarebbe una miglior risposta a $\mathbf{p^{-i}}$, contraddicendo il fatto che fa parte di un equilibrio di Nash.

(Se.) Supponiamo ora che ogni strategia pura nel supporto di p^i sia una miglior risposta a $\mathbf{p^{-i}}$, ma che il profilo $p^1, p^2, \ldots, p^N$ non sia un equilibrio di Nash, ossia supponiamo che esista una strategia mista $\hat{p}^i$ che dà luogo a un'utilità attesa per i superiore a quella di p^i in risposta a $\mathbf{p^{-i}}$. Sempre per la linearità dell'utilità attesa, deve esserci dunque nel supporto di $\hat{p}^i$ almeno una strategia pura avente utilità attesa superiore a qualche strategia nel supporto di p^i, il che però contraddice l'ipotesi che tutte le strategie pure nel supporto di p^i sono migliori risposte a $\mathbf{p^{-i}}$. $\square$

L'importante conseguenza di questo teorema è che dunque, tutte le strategie pure contenute nel supporto di una strategia mista, all'equilibrio, danno luogo alla stessa utilità attesa della strategia mista. Questo fatto può essere utilizzato per calcolare l'equilibrio di Nash in molti casi: imponendo le condizioni corrispondenti, si vede se esiste o meno un vettore di probabilità per ogni giocatore tale da soddisfare le condizioni del Teorema 5. Tuttavia questo non basta a concludere che siamo in presenza di un equilibrio di Nash: deve anche verificarsi che ciascuna strategia pura nel supporto di p^i sia la miglior risposta alle altre ($\mathbf{p^{-i}}$).

ESEMPIO 7 *Riprendendo l'esempio della battaglia dei sessi, abbiamo visto che ci sono due equilibri di Nash* (b, b) *e* (w, w)*. Esistono anche equilibri in strategie miste?*

Basta ragionare come segue. Supponiamo che 2 giochi una strategia mista, sia essa (q_w, q_b)*. Possiamo anzitutto escludere che, all'equilibrio, la strategia di 1 sia pura, in quanto, per il Teorema 5, il payoff per 2 dovrebbe essere lo stesso giocando sia* w *che* b*: questo non accade né se 1 gioca* w *né se gioca* b*.*

Dunque, se cerchiamo una strategia mista di equilibrio per 2, anche 1 deve giocare una strategia mista, sia (p_w, p_b)*. Ora, se 1 gioca* w*, il suo payoff atteso sarà* $3q_w + 0q_b = 3q_w$*, mentre se gioca* b*, sarà* $0q_w + 1q_b = q_b$*. Sempre per il Teorema 5, abbiamo che queste due quantità devono essere uguali, ovvero*

$$3q_w = q_b$$

che, unitamente al fatto che

$$q_w + q_b = 1$$

consente di concludere che, se una strategia mista di equilibrio esiste per 2, questa avrà senz'altro $q_w = 1/4$ *e* $q_b = 3/4$*. Con argomentazioni simmetriche, si giunge a concludere che la strategia mista di equilibrio per 1 è* $p_w = 3/4$ *e* $p_b = 1/4$*.* $\square$

ESEMPIO 8 *Lo stesso procedimento, applicato a Falchi e Colombe, consente di riconoscere che esiste anche qui un equilibrio in strategie miste, vale a dire* $(5/6, 1/6)$ *per 1 e lo stesso per 2.* $\square$

ESEMPIO 9 *È lasciato al lettore per esercizio mostrare che in Testa o Croce esiste l'unico equilibrio di Nash* $(1/2, 1/2)$ *(per entrambi i giocatori).* $\square$

	b_1	b_2	b_3
a_1	0	4	4
a_2	2	0	2
a_3	1	1	0

Tabella 13: Esempio di gioco a somma zero.

Esempio 10 *Un aereo deve attaccare uno di tre bersagli strategici. L'esercito avversario ha un mitragliatore antiaereo, che può proteggere uno dei bersagli possibili. Un bersaglio è distrutto se viene attaccato e non vi è stata collocata la difesa antiaerea. Se l' aereo riesce a colpire uno dei bersagli, guadagna un'utilità pari al valore del bersaglio; lo stesso valore viene invece perso dall'altro esercito (gioco a somma zero). I valori dei tre bersagli sono 4, 2 e 1.*

Si ha la tabella 13. Determiniamo gli equilibri di Nash in questo gioco. Anzitutto chiediamoci se vi sono equilibri in strategie pure. Chiaramente no: qualunque sia la situazione, uno dei due eserciti ha sempre interesse a cambiare la propria azione.

Per cercare equilibri in strategie miste, volendo imporre le condizioni del Teorema 5, vediamo se vi può essere un equilibrio in cui ambedue le strategie miste hanno come supporto tutte e tre le strategie pure. Perché ciò accada deve aversi

$$4q_2 + 4q_3 = 2q_1 + 2q_3 = q_1 + q_2 \tag{17}$$

che sono un sistema omogeneo di tre equazioni in tre incognite. A queste va aggiunto

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1 \tag{18}$$

Siccome la matrice dei coefficienti del sistema di cui sopra (che, si noti, coincide con la Tabella 13) ha determinante diverso da zero, chiaramente l'insieme delle (17) e (18) non ammette soluzione.

Con discorsi analoghi per il giocatore 2, si arriva alla conclusione che non possono esservi equilibri di Nash in cui la strategia mista di un giocatore usa tutte e tre le strategie pure. Rimangono quindi da esaminare gli equilibri in strategie miste formati da due strategie pure. Occorre esaminare vari sottocasi (in linea di principio, nove).

Cominciamo dal caso in cui $q_3 = 0$*, ossia il supporto della strategia mista di 2 è formato dalle prime due strategie pure. Possiamo allora subito escludere che il supporto di 1 sia formato da* $\{a_2, a_3\}$*, in quanto è evidente che in questo caso al giocatore 2 conviene, tra* b_1 *e* b_2*, giocare sempre* b_2 *– in altre parole, nel sottogioco ristretto a* $p_1 = 0$ *e* $q_3 = 0$*, la* b_1 *è (debolmente) dominata da* b_2*. Ma allora è evidente che non sia* $\{a_2, a_3\}$ *la miglior risposta alla strategia pura* b_2 *(a 1 converrebbe giocare* a_1*). Analogo ragionamento ci consente di escludere che possa essere di equilibrio la strategia* $\{a_1, a_3\}$*. Vediamo invece* *se 1 gioca $\{a_1, a_2\}$. In tal caso non vi è motivo evidente, da parte di 2, di cambiare strategia: b_3 è anzi, nel sottogioco, dominato da ambedue le altre strategie. Imponiamo allora le condizioni del Teorema 5 limitatamente alle prime due strategie di 1, con $p_3 = 0$:*

$$4q_2 = 2q_1$$

e

$$q_1 + q_2 = 0$$

da cui $q^* = (2/3, 1/3, 0)$ e, con analoghi calcoli a parti invertite, $p^* = (1/3, 2/3, 0)$. Il valore atteso dell'utilità di 1 è dato dunque da $v^* = 1/3(4 * 1/3) + 2/3(2 * 2/3) = 4/3$. Se consideriamo l'altra strategia, a_3, vediamo che il suo valore atteso a fronte di q^* è dato da $1 * 2/3 + 1 * 1/3 = 1$, che essendo inferiore a 4/3, ci porta a concludere che dunque a_3 non è la miglior risposta a q^*. Analogamente, per il giocatore 2, se giocasse b_3 a fronte di p^* avrebbe un'utilità attesa di $4 * 1/3 + 2 * 2/3 = 8/3$ che è maggiore di 4/3, e dunque peggiore: b_3 non è la miglior risposta a p^*. Dunque, (p^*, q^*) è un possibile equilibrio di Nash.

Supponiamo ora che nella strategia mista di 2, sia $q_1 = 0$. Si vede subito che questo non può portare a equilibri di Nash: infatti, qualunque cosa faccia 2, a quel punto la miglior risposta è (ovviamente, pensando al significato del modello) quella di giocare a_1 come strategia pura, ma la miglior risposta a a_1 è b_1, non rappresentata nella strategia mista di 2.

Infine, consideriamo il caso in cui la strategia mista di 2 sia quella con $q_2 = 0$. Consideriamo i tre sottocasi corrispondenti. Il caso $p_1 = 0$ possiamo scartarlo subito in quanto in tal caso b_3 dominerebbe b_1 e si ritorna al caso delle strategie pure. Per lo stesso motivo possiamo scartare il caso $p_3 = 0$ (b_1 dominerebbe b_3). Rimane il caso $p_2 = 0$, che è un po' più sottile degli altri. Infatti, imponendo le condizioni del Teorema 5, si ottiene $q = (4/5, 0, 1/5)$ e $p = (1/5, 0, 4/5)$. Tuttavia, occorre ora chiedersi se p sia effettivamente la miglior risposta a q. L'utilità attesa di p è

$$1/5(4 * 1/5) + 4/5(1 * 4/5) = 4/5$$

mentre se 1 giocasse la strategia pura a_2, otterrebbe 2, che è maggiore. Dunque a_1 e a_3 non sono la miglior risposta a q, mentre lo sarebbe a_2, che però non è nel supporto di p. Dunque (p, q) non è un equilibrio di Nash.

L'unico equilibrio è quindi (p^*, q^*). $\square$