1

Ottimizzazione non vincolata - esercizi d'esame

1.1 Prima prova 2002-2003

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$. Si applichi una iterazione del metodo del gradiente, effettuando la line search in modo *esatto*, a partire dai punti $A = [2\ 0]^T$, $B = [1\ 2]^T$. Commentare la differenza tra i risultati trovati.

Svolgimento

A partire dal punto $A = [2\ 0]^T$ la direzione di discesa è $d = [-4\ 0]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(A + \alpha d)]^T d = [2(2 - 4\alpha)\ 0]^T[-4\ 0] = 0$, ovvero $\alpha = \frac{1}{2}$. Il nuovo punto è $A' = [0\ 0]$, ed il gradiente calcolato in A' rispetta le condizioni di arresto. A partire dal punto $B = [1\ 2]^T$ la direzione di discesa è $d = [-2\ \ -16]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(B + \alpha d)]^T d = [2 - 4\alpha\ 16(1 - 8\alpha)]^T[-2\ \ -16] = 0$, ovvero $\alpha = \frac{65}{514}$. Il nuovo punto è $B' = [\frac{192}{257}\ \ -\frac{6}{257}]$, ed il gradiente calcolato in B' non rispetta le condizioni di arresto. Partendo dal punto A si ragiunge un punto di arresto in una sola iterazione, mentre partendo dal punto B il metodo del gradiente necessita di altre iterazioni per raggiungere un punto che rispetta le condizioni di arresto.

1.2 Prima prova 2002-2003

Si consideri la funzione $f(x) = 2x_1^2x_2^2 + x_1^3 + x_2$. Per ognuno dei punti $A = (0, 2)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, -1)$, $D = (0, 10)$ e $E = (1, 0)$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente. (Si supponga che la condizione d'angolo sia verificata)

1.3 Prima prova 2002-2003

Si consideri la funzione $f(x) = 3x_1^3x_2 + x_2^2$. A partire dai punti $A = [1\ 0]^T$, $B = [0\ 3]^T$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente.

Svolgimento

Si ha $\nabla f(A)^T = [0\ 3]$, mentre $\nabla^2 f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$. Quindi la direzione di Newton è $d = -(\nabla^2 f(A))^{-1})\nabla f(x) = -\begin{bmatrix} -\frac{2}{81} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, ovvero $d^T = [-\frac{1}{3}\ 0]$. Siccome $\nabla f(A)^T d = 0$, d non può evidentemente soddisfare la condizione d'angolo, e quindi si sceglie l'antigradiente ovvero $[0\ \ -3]$. L'Hessiana calcolata in B è $\nabla^2 f(B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Essendo singolare, di nuovo la direzione prescelta sarà la direzione dell'antigradiente $d = -\nabla f(x) = [0\ \ -6]^T$.

1.4 31/3/03

Data la funzione $f(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2$. A partire dal punto $A = [1\ 1]^T$, si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton puro.

Svolgimento

L'Hessiana è $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$. Quindi la direzione di Newton è $d = -(\nabla^2 f(A))^{-1})\nabla f(x) = -\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, ovvero $d = [-1\ \ -1]^T$, ed il nuovo punto è $A = [0\ 0]^T$ che rispetta le condizioni di arresto.

1.5 31/3/03

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^3 + 2x_2^2 + x_1^2 + 2x_1$. A partire dal punto $A = (0, 0)$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente (si consideri $\epsilon = 1/2$).

Svolgimento

L'Hessiana calcolata in A è $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Quindi la direzione di Newton è $d = -(\nabla^2 f(A))^{-1})\nabla f(x) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, ovvero $d = [-1\ 0]^T$. La condizione d'angolo $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$ risulta verificata in quanto per la direzione di Newton vale $2 \geq 1$. Inoltre la direzione di Newton è direzione di discesa $[2\ 0][-1\ 0]^T = -2$. Per il calcolo del passo α si ottiene α immaginario. La direzione punta verso un minimo a $-\infty$ e l'ampiezza del passo α è infinita.

1.6 16/4/03

Data la funzione $f(x) = x_1^4 - 5x_2^3 + x_1^2 x_2$. A partire dal punto $A = (1, 0)$, si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente (si consideri $\epsilon = 1/2$).

1.7 Prima prova 2003-2004

Si consideri la funzione $f(x) = 3x_1^4 + 4x_2^2 x_1 + x_1$. A partire dai punti $A = (0; 0)$ e $B = (1/2; 1/2)$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton modificato. (Si supponga che sia sempre soddisfatta la condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$)

1.8 Prima prova 2003-2004

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^3 + x_1^2 x_2 - 2x_2$. A partire dai punti $A = (1; 0)$ e $B = (0; 1)$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton modificato. (Si supponga che sia sempre soddisfatta la condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$)

1.9 Prima prova 2003-2004

Si consideri la funzione $f(x) = x_1 x_2^3 - 2x_1$. A partire dai punti $A = (1; 0)$ e $B = (1; 1)$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton modificato. (Si supponga che sia sempre soddisfatta la condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$)

1.10 Prima prova 2003-2004

Si consideri la funzione $f(x) = (x_1 - 1)^3 - x_2^2$. A partire dai punti $A = (1/2; 1/2)$ e $B = (1; 1)$ si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton modificato, utilizzando una line search esatta. (Si consideri $\epsilon = 1/4$ per verificare se l'angolo tra la direzione e ∇f si discosta sufficientemente dai 90°).

1.11 Prima prova 2003-2004

Si consideri la funzione $f(x) = (x_2 - 1)^3 + 2x_1^2$. A partire dal punto $A = (1; 1)$ si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton modificato. Per la line search, si utilizzi il metodo di Armijo con $\alpha_0 = 1/2$, $\gamma = 1/4$ e $\sigma = 1/2$.

1.12 20/4/04

Si consideri la funzione $f(x) = (x_1 - 2)^5 - 3x_2^3$. A partire dai punti $A = (1; 1/3)$ e $B = (1; 0)$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton modificato. (Si supponga che sia sempre soddisfatta la condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$)

1.13 1/9/04

Si consideri la funzione $f(x) = 4x_1^5 x_2 + x_2^2 x_1$. A partire dai punti $A = (0,0)$ e $B = (0,1)$ si determini, se possibile, una direzione di discesa applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente (si consideri $\epsilon = 1/2$).

1.14 Prima prova 2004-2005

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^2 x_2 - x_1 x_2$. A partire dai punti $A = [1\ 1]^T$, $B = [\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]^T$ si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente, utilizzando una line search esatta. Si controlli la condizione di arresto dell'algoritmo. (Si ponga $\epsilon = 1/2$ nella condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$)

Svolgimento

L'Hessiana calcolata in A è $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi la direzione di Newton è $d = -(\nabla^2 f(A))^{-1})\nabla f(x) = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ovvero $d = [0\ -1]^T$. La condizione d'angolo $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$ non risulta verificata in quanto la direzione di Newton è ortogonale al gradiente $0 > \frac{1}{2}$. Il metodo di Newton modificato sceglie quindi come direzione di discesa la direzione dell'antigradiente $d = [-1\ 0]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(A + \alpha d)]^T d = 0$, ovvero $\alpha = \frac{1}{2}$. Il nuovo punto è $A' = [\frac{1}{2}\ 1]$. L'Hessiana calcolata in B è $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. essendo singolare, la direzione sarà la direzione dell'antigradiente $d = -\nabla f(x) = [0\ \frac{1}{4}]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(B + \alpha d)]^T d = 0$ che non dipende da α. La direzione di discesa quindi punta diretta verso un minimo a $-\infty$, infatti $\lim_{x_1 = \frac{1}{2}, x_2 \to +\infty} f(x) = -\infty$.

1.15 Prima prova 2004-2005

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^3 + 3x_1 x_2^2 + 3x_2$. A partire dai punti $A = (1;1)$ e $B = (0;0)$ si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente, utilizzando una line search esatta. Si controlli la condizione di arresto dell'algoritmo. (Si ponga $\epsilon = 1/2$ nella condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$)

1.16 Prima prova 2004-2005

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^3 + 3x_1 x_2^2$. A partire dal punto $A = (1;0)$ si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente, utilizzando una line search esatta. Si controlli la condizione di arresto dell'algoritmo. (Si ponga $\epsilon = 1/2$ nella condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$)

1.17 7/4/05

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2$. Si applichi una iterazione del metodo del gradiente effettuando la line search in modo *esatto*, a partire dai punti $A = [-1\ 1]^T$, $B = [2\ 0]^T$. Commentare la differenza tra i risultati trovati.

Svolgimento

A partire dal punto $A = [-1\ 1]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(A + \alpha d)]^T d = [2(-1-\alpha) + 2\ 4(1-4\alpha)]^T [0\ \ -4] = 0$, ovvero $\alpha = \frac{1}{4}$. Il nuovo punto è $A' = [-1\ 0]$, ed il gradiente calcolato in A' rispetta le condizioni di arresto. A partire dal punto $B = [2\ 0]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(B + \alpha d)]^T d = [2(2-6\alpha) + 2\ \ 0]^T [-6\ \ 0] = 0$, ovvero $\alpha = \frac{1}{2}$. Il nuovo punto è $B' = [-1\ \ 0]$, ed il gradiente calcolato in B' rispetta le condizioni di arresto. In entrambi i casi viene raggiunto lo stesso punto di arresto in un'unica iterazione.

1.18 29/4/05

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$. Si applichi una iterazione del metodo del Newton nella versione globalmente convergente effettuando la line search in modo *esatto*, a partire dal punto $A = [2\ 2]^T$. Si ponga nella condizione d'angolo $\varepsilon = 1/2$, e si controlli la condizione di arresto dell'algortimo.

1.19 5/7/05

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^2 + x_2 + 2x_3 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3$. Si applichi una iterazione del metodo del gradiente effettuando la line search in modo *esatto*, a partire dal punto $A = [-1\ 0\ 2]^T$. Si controlli la condizione di arresto dell'algortimo.

Svolgimento

La direzione di discesa è $d = [0\ \ -7\ \ -1]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(A + \alpha d)]^T d = [-15\alpha\ \ (7-4\alpha)\ \ 1-28\alpha]^T [0\ \ -7\ \ -1] = 0$, ovvero $\alpha = \frac{25}{28}$. Il nuovo punto è $A' = [-1\ \ -\frac{25}{4}\ \ \frac{31}{28}]$, ed il gradiente calcolato in A' non rispetta le condizioni di arresto.

1.20 Prima prova 2005-2006

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2$. A partire dai punti $A = (1, 0, 0)$ e $B = (2, 0, 2)$, si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di

Newton modificato, utilizzando una line search esatta. Si controlli la condizione di arresto dell'algoritmo. (Si ponga $\epsilon = 1/2$ nella condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$.)

2

Ottimizzazione vincolata - esercizi d'esame

2.1

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1 + x_2^2 & \\ g_1(x) = 4x_1^2 - x_2 + 2 & \geq 0 \\ g_2(x) = -x_1 + x_2^2 & \geq 0 \\ g_3(x) = -x_1x_2 + 1 & \geq 0 \\ g_4(x) = x_1 & \geq 0 \\ g_5(x) = -x_2 + 2 & \geq 0 \end{aligned}$$

- Quali di questi punti $A = (0, 2)$, $B = (1/2, 2)$ e $C = (3/4, 4/3)$ possiamo escludere essere punti di minimo locale?
- Partendo dal punto $D = (0, 0)$, si studi la sensibilità della funzione obiettivo ad una variazione ϵ del vincolo g_2.
- Partendo dal punto $E = (1, 1)$, si determini (in maniera analitica) una direzione di discesa ammissibile.
- Partendo dal punto $F = (0, 1)$, la direzione $d = [-1 \;\; 1]^T$ è una direzione di discesa o salita? È una direzione ammissibile o no?

2.2 Prima prova 2002-2003

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min -x_1^3 - x_2 & \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 & \leq 4 \\ g_2(x) = x_1^2 + 4x_2^2 & \geq 4 \\ g_3(x) = x_1 - x_2 & \leq 0 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = (-2, 0)$, $B = (\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5})$ e $C = (0, 1)$ possono essere punti di minimo locale?

Svolgimento

Nel punto A sono attivi i vincoli g_1 e g_2. Le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi in A portano allo Jacobiano $J(A) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$. Le due righe sono linearmente dipendenti, quindi nel punto A le condizioni di qualificazione dei vincoli non sono rispettate e non si può escludere che il punto sia di minimo. Nel punto B sono attivi i vincoli g_2 e g_3, quindi $\lambda_1 = 0$. Le condizioni di qualificazione dei vincoli sono rispettate, infatti le colonne dello Jacobiano sono Linearmente Indipendenti $J(B) = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}\sqrt{5} & \frac{16}{5}\sqrt{5} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Risolvendo le condizioni di KKT si ottiene $\lambda_2 = -\frac{17}{25\sqrt{(5)}}$ $(\lambda_3 = \frac{147}{125})$, quindi le condizioni di KKT non sono verificate. Il punto B si può escludere che sia un punto di minimo. Nel punto C risulta attivo solo il vincolo g_2, e le condizioni di qualificazione sono rispettate. In C vale $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_3 = 0$ le condizioni di KKT portano a $\lambda_2 = -\frac{1}{8}$ e quindi non sono rispettate. Il punto C si può escludere che sia un punto di minimo.

2.3 Prima prova 2002-2003

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + 2x_2^3 & \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 &\leq 1 \\ g_2(x) = x_1 + x_2^2 &\geq 1 \\ g_3(x) = -x_1 + x_2^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ possono essere punti di minimo locale?

Svolgimento

Nel punto A sono attivi i vincoli g_1 e g_2. Le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi in A portano allo Jacobiano $J(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Le due colonne sono Linearmente Dipendenti, quindi nel punto A le condizioni di qualificazione dei vincoli non sono rispettate e non si può escludere che il punto sia di minimo. Nel punto B risultano attivi tutti e tre i vincoli, e quindi le condizioni di qualificazione dei vincoli non sono rispettate e non si può escludere che il punto sia di minimo. Il punto C è fuori dalla regione ammissibile (violato il vincolo g_2) e sicuramente non può essere punto di minimo.

2.4 Prima prova 2002-2003

Si consideri il problema

$$
\begin{aligned}
\min -x_1^2 + x_2 & \\
g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 &\geq 0 \\
g_2(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $A = [1\ 0]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.

- Supponendo che il secondo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

  $$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq -\epsilon ||\nabla g_2(A)||$$

  In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

Svolgimento

Nel punto A sono attivi i vincoli g_1 e g_2. Le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi in A portano allo Jacobiano $J(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Le due colonne sono Linearmente Indipendenti, e le condizioni di qualificazione dei vincoli sono rispettate. Le condizioni di KKT calcolate in A portano a $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ e sono rispettate. Il punto A rispetta le condizioni necessarie di ottimalità. La sensibilità della funzione obiettivo alla variazione del vincolo g_2 di ϵ è pari a $\frac{df}{d\epsilon} = -||\nabla g_2(A)||\lambda_2 = -2\frac{3}{2} = -3$.

–

2.5 Prima prova 2002-2003

Indichiamo con P1 e P2 i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$
\begin{aligned}
\min 4x_1^3 + x_2^2 + 3 & \\
-2x_1^2 + x_2 - 3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min 4x_1^3 + x_2^2 + 3 & \\
-2x_1^2 + x_2 - 3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Si considerino il punto $x = [1\ 5]^T$ e la direzione $d = [-1\ \ -3]^T$. Per ciascuno dei due problemi P1 e P2, rispondere alle seguenti domande: Partendo dal punto x, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile? Se si', soddisfa la condizione d'angolo con $\epsilon = 0.5$?

Svolgimento

La direzione d nel problema P1 è direzione di discesa ($\nabla f(x)^T d = -12 - 30 \leq 0$) ma non una direzione ammissibile (essendo il vincolo di uguaglianza una direzione ammissibile deve essere ortogonale al gradiente del vincolo nel punto). Infatti $\nabla g(x)^T d = 4-3 \neq 0$. La direzione d nel problema P2 è direzione di discesa ($\nabla f(x)^T d = -12-30 \leq 0$) e ammissibile ($\nabla g(x)^T d = 4 - 3 \geq 0$). d soddisfa la condizione d'angolo $|\nabla f(x)^T d| \geq \epsilon ||\nabla f(x)|| ||d||$ in quanto risulta $42 \geq 0.5(15.62 \times 3.16) = 24.67$.

2.6 Prima prova 2002-2003

Indichiamo con P1 e P2 i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 & \\ x_1^2 + x_2^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 & \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Si considerino il punto $x = [1 \ 0]^T$ e la direzione $d = [-1 \ \ -1]^T$. Per ciascuno dei due problemi P1 e P2, rispondere alle seguenti domande: Partendo dal punto x, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile? Se si', soddisfa la condizione d'angolo con $\epsilon = 0.5$?

2.7 11/7/03

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min x_1 + 3x_2 & \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 &\leq 2 \\ g_2(x) = x_1 + x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

la cui soluzione ottima è $x^* = [1 \ \ -1]^T$. Supponiamo ora che il secondo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$x_1 + x_2 \geq -\epsilon ||\nabla g_2(x^*)||$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ, ossia quanto vale $\frac{df}{d\epsilon}$ nell'intorno di x^*?

2.8 31/3/03

Siano P1 e P2 i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + 2x_1^2 x_2 - x_2 & \\ x_1^2 + 4x_2^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + 2x_1^2 x_2 - x_2 & \\ x_1^2 + 4x_2^2 \;\; & \leq \;\; 4 \end{aligned}$$

Dati il punto $x = [0\ 2]^T$ e la direzione $d = [-1\ \ -1]^T$, dire per ciascuno dei due problemi P1 e P2, se d è una direzione di discesa ammissibile per f in x, e se soddisfa la condizione d'angolo con $\epsilon = 0.5$.

2.9 29/5/03

Indichiamo con P1 e P2 i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} & \min x_1^3 + x_2^3 + 5 \\ & -2x_1^2 + x_2 - 3 \;\; = \;\; 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min 4x_1^3 + x_2^2 + 3 \\ & -2x_1^2 + x_2 - 3 \;\; \geq \;\; 0 \end{aligned}$$

Si considerino il punto $x = [1\ 5]^T$ e la direzione $d = [-1\ \ -3]^T$. Per ciascuno dei due problemi P1 e P2, rispondere alle seguenti domande: Partendo dal punto x, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile? Se si', soddisfa la condizione d'angolo con $\epsilon = 0.5$?

2.10 11/7/03

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 & \\ -x_1^2 - x_2^2 \;\; & \geq \;\; -4 \\ -x_1 + x_2 \;\; & \geq \;\; -2 \\ +x_1 - x_2 \;\; & \geq \;\; -2 \end{aligned}$$

Dire, per ciascuno dei seguenti punti, quali si possono escludere come punti di minimo: $A = (0, 0)$, $B = (0, -2)$, $C = (2, 0)$, $D = (\sqrt{3}, 1)$.

Svolgimento

Nel punto A nessun vincolo risulta attivo e le condizioni di KKT non sono rispettate. Nel punto B sono attivi tutti i vincoli e le condizioni di KKT sono rispettate. Nel punto C risultano attivi i primi due vincoli ma le condizioni di KKT non sono rispettate. Nel punto D risulta attivo il terzo vincolo e le condizioni di KKT non sono rispettate. Le condizioni di qualificazione dei vincoli sono rispettate in tutti i punti ad eccezione del punto B. Solamente il punto B non si pu escludere che sia un punto di minimo.

2.11 31/3/03

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1 + 2x_2 & \\ x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 &\geq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 &\geq 0 \\ x_1^2 + 2x_2^2 &\leq 16 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dire se $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (0, 2\sqrt{2})$, $D = (0, 1)$ possono essere punti di minimo locale.

2.12 16/4/03

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min 4x_1^3 - 3x_2 & \\ x_1 - x_2^2 &\geq 0 \\ 2 - x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dire quali dei seguenti punti possono essere eventuali punti di minimo: $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 0)$, $D = (1, 0)$.

2.13 24/7/03

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + x_2 & \\ x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 &\geq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 4 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dire quali dei seguenti punti possono essere eventuali punti di minimo: $A = (-2, 0)$, $B = (0, 0)$, $C = (2, 0)$.

2.14 Prima prova 2003-2004

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_2 & \\ 1 - (1/4)x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ 1 - x_1^2 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = (0;1)$, $B = (1;0)$, $C = (0;-1)$ possiamo escludere che siano punti di minimo locale? Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

2.15 Prima prova 2003-2004

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + x_2 & \\ 1 - x_1^2 - (1/4)x_2^2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2^2 - 1 &\geq 0 \\ x_2 + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = (0;2)$, $B = (1;0)$, $C = (0;-1)$ possiamo escludere che siano punti di minimo locale? Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

2.16 Prima prova 2003-2004

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + x_2 & \\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 &\geq 0 \\ 1 + x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\ 2 - x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = (1;2)$, $B = (-1;0)$, $C = (-5;2)$ possiamo escludere che siano punti di minimo locale? Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

2.17 Prima prova 2003-2004

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min -x_1 - x_2 & \\ 1 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ 1 - x_1^2 + x_2 &\geq 0 \\ x_1 - x_2 + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = (0;1)$, $B = (1;1)$, $C = (0;-1)$ possiamo escludere che siano punti di minimo locale? Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

2.18 Prima prova 2003-2004

Si consideri il problema

$$\begin{array}{rcl} & \min x_2 & \\ 1-(1/4)x_1^2-x_2^2 & \geq & 0 \\ 1-x_1^2-x_2 & \geq & 0 \\ x_1+1 & \geq & 0 \end{array}$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = [0 \;\; -1]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.
- Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

  $$1-(1/4)x_1^2-x_2^2 \geq -\epsilon||\nabla g_1(x^*)||$$

  In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

2.19 Prima prova 2003-2004

Si consideri il problema

$$\begin{array}{rcl} & \min -x_1 & \\ x_1^2+(x_2+1)^2-4 & \geq & 0 \\ 1-x_1+x_2^2 & \geq & 0 \\ -x_2 & \geq & 0 \\ x_2+2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = [5 \;\; -2]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.
- Supponendo che il secondo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

  $$1-x_1+x_2^2 \geq -\epsilon||\nabla g_2(x^*)||$$

  In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

2.20 Prima prova 2003-2004

Si consideri il problema

$$\begin{array}{rcl} \min -x_1-x_2 & & \\ 1-x_1^2-x_2^2 & \geq & 0 \\ 1-x_1^2+x_2 & \geq & 0 \\ x_1-x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = [\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.
- Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

  $$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq -\epsilon ||\nabla g_1(x^*)||$$

  In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

2.21 Prima prova 2003-2004

Si consideri il problema

$$\begin{aligned}
&\min x_1\\
&g_1(x) = -x_1 x_2 \geq 0\\
&g_2(x) = x_2 - x_1^2 - 2 \geq 0
\end{aligned}$$

E si consideri il punto $x = [-1\ 3]^T$ e la direzione $d = [1\ 2]^T$. Partendo dal punto x, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile? Se no, individuare (graficamente o analiticamente) una direzione di discesa ammissibile.

2.22 20/4/04

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned}
\min 4x_1 + x_2 &\\
1 - (1/4)x_1^2 - x_2^2 &\geq 0\\
2 + x_1 - 2x_2 &\geq 0\\
2 + x_1 + 2x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = (-2; 0)$, $B = (0; 1)$, $C = (2; 0)$, $D = (0; 0)$ possiamo escludere che siano punti di minimo locale? Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

2.23 1/9/04

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned}
\min x_1^3 + 2x_2^4 &\\
x_1^2 + x_2^2 &\geq 1\\
\sqrt{2} - x_1 - x_2 &\geq 0\\
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Verificare se i punti $A = (0, 0)$, $B = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $C = (1, 0)$, $D = (\sqrt{2}, 0)$ possono essere punti di minimo. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

2.24 30/9/04

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + 2x_2^4 & \\ g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = 2 + x_1 + x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = [-2\ 0]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale? Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$4 - x_1^2 - x_2^2 \geq -\epsilon||\nabla g_1(x^*)||$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

2.25 30/9/04

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + x_2^3 & \\ h(x) = 2 - 3x_1^2 - 2x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

e si considerino i punti $A = [\sqrt{2/3}\ 0]^T$ e $B = [0\ 1]^T$ e la direzione $d = [0\ \ -1]^T$. Per ciascuno dei due punti A e B, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile?

2.26 Prima prova 2004-2005

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1 + x_2^2 & \\ g_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2 &\geq 0 \\ g_2(x) = -x_1 + x_2 + 2 &\geq 0 \\ g_3(x) = x_1 + 2 &\geq 0 \\ g_4(x) = 2 - x_2 &\geq 0 \\ g_5(x) = x_1 x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Quali di questi punti $A = (4, 2)$, $B = (-1, -2)$ e $C = (-2, 0)$ possono essere punti di minimo locale?
- Partendo dal punto $x^* = (0, 1)$ si studi la sensibilità della funzione obiettivo ad una variazione $\epsilon||\nabla g_5(x^*)||$ del vincolo g_5.
- Partendo dal punto $E = (3, 1)$ si determini (in maniera analitica) una direzione di discesa ammissibile. Si consideri il punto $F = (-4, -2)$ e la direzione $d = [1\ -1]^T$, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile?

2.27 7/4/05

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min -x_2^2 \\ g_1(x) = 4 - (x_1-1)^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_3(x) = -x_1 x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $P = [-1\ 0]^T$, $Q = [0\ \ -1]^T$, $R = [3\ 0]^T$, $S = [1\ 2]^T$, possono escludere che siano punti di minimo locale?

2.28 29/4/05

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min 2x_1^2 + 9x_2^2 \\ g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_1 + x_2 - 3 &\geq 0 \\ g_3(x) = x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Studiare l'esistenza dei punti di minimo.

2.29

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min x_1 \\ g_1(x) = 4 - (x_1-1)^2 - (x_2-1)^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_3(x) = x_1 x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = [1\ 1]^T$, $B = [1\ 0]^T$, $C = [0\ 1]^T$, $D = [0\ 0]^T$, possono essere punti di minimo locale?

2.30 7/4/05

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min -x_2^2 \\ g_1(x) = 4 - (x_1-1)^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_3(x) = -x_1 x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = [0\ \sqrt{3}]^T$. Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$4 - (x_1 - 1)^2 - x_2^2 \geq -\epsilon||\nabla g_1(x^*)||$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

2.31

Si consideri il problema

$$\begin{array}{rcl} \min -x_1^2 & & \\ g_1(x) = 4 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 & \geq & 0 \\ g_3(x) = x_1 x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = [1\ 3]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità. Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$4 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 \geq -\epsilon||\nabla g_1(x^*)||$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

2.32

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{array}{rcl} \min x_1^2 - 3x_2^2 + x_1 x_2 & & \\ 2 - x_1^2 - x_2^2 & \geq & 0 \end{array}$$

E si considerino i punti $A = [0\ 1]^T$ e $B = [1\ 0]^T$ e la direzione $d = [-1\ \ -1]^T$. Per ciascuno dei due punti A e B, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile?

2.33 7/4/05

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{array}{rcl} \min 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 & & \\ 2x_1^2 + x_2 - 5 & \geq & 0 \\ x_1 x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

E si considerino i punti $P = [1\ 3]^T$ e $Q = [0\ \ -2]^T$ e la direzione $d = [1\ \ -5]^T$. Per ciascuno dei due punti P e Q, dire se la direzione d è una direzione ammissibile di discesa o meno (e perché).

2.34 5/7/05

Si consideri il problema

$$
\begin{aligned}
\min 4x_1^2 + x_1x_2 & \\
g_1(x) = x_1 + x_2 - 10 &\geq 0 \\
g_2(x) = -x_1^2 - x_2 + 100 &\geq 0 \\
g_3(x) = x_1 - x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Quali di questi punti $A = [10\ 0]^T$ $B = [6\ 5]^T$ $C = [5\ 5]^T$ $D = [1\ 1]^T$ si possono escludere che siano punti di minimo locale?

Svolgimento

Nel punto $A = [10\ 0]^T$ sono attivi i vincoli g_1 e g_2, le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi sono rispettate, e $\lambda_1 = \frac{120}{19}$, $\lambda_2 = -\frac{70}{19}$ $\lambda_3 = 0$. Il punto non rispetta le condizioni KKT e quindi non può essere un minimo locale. Il punto $B = [6\ 5]^T$ si trova all'interno della regione ammissibile (nessun vincolo attivo) e $\lambda_1 =$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Il punto non rispetta le condizioni KKT e quindi non può essere un minimo locale. Nel punto $C = [5\ 5]^T$ sono attivi i vincoli g_1 e g_3. Il punto rispetta le condizioni KKT (con $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = 20$), e quindi può essere un minimo locale. Il punto $D = [1\ 1]^T$, violando il vincolo g_1, si trova fuori dalla regione ammissibile.

2.35 Prima prova 2005-2006

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$
\begin{aligned}
\min x_1 + x_2^2 & \\
g_1(x) = 4x_1^2 - x_2 + 2 &\geq 0 \\
g_2(x) = -x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\
g_3(x) = -x_1x_2 + 1 &\geq 0 \\
g_4(x) = x_1 &\geq 0 \\
g_5(x) = -x_2 + 2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Quali di questi punti $A = (0, 2)$, $B = (1/2, 2)$ e $C = (3/4, 4/3)$ possiamo escludere essere punti di minimo locale?
- Partendo dal punto $D = (0, 0)$, si studi la sensibilità della funzione obiettivo ad una variazione ϵ del vincolo g_2.
- Partendo dal punto $E = (1, 1)$, si determini (in maniera analitica) una direzione di discesa ammissibile.
- Partendo dal punto $F = (0, 1)$, la direzione $d = [-1\ \ 1]^T$ è una direzione di discesa o salita? È una direzione ammissibile o no?