A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Secondo recupero

21 Settembre 2007

Nome:

Cognome:

Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** _____ ○

Esercizio 1

Una società chimica produce tre solventi: A,B,C, i cui prezzi di vendita sono, rispettivamente, 40, 60 e 20 euro/kg. Il profitto sul solvente C è pari al 40% del prezzo di vendita, mentre il profitto su A e B è pari al 15% del prezzo di vendita.
La società desidera ottenere un fatturato mensile non inferiore a 10 milioni di euro. Il processo produttivo di A, B e C richiede il consumo di una risorsa D altamente deperibile, in misura pari a 5 grammi di D per kg di A prodotto, 8 grammi di D per kg di B prodotto e 6 grammi di D per kg di C prodotto. La risorsa D è prodotta in un impianto della capacità massima di 2 tonnellate/mese e va consumata nello stesso mese di produzione. Si consideri che l'intera produzione mensile, comunque ripartita tra i tre prodotti, possa sempre essere venduta sul mercato, e che tuttavia si debba garantire la produzione di almeno 150 tonnellate/mese complessive tra solventi B e C.

1. Si formuli come problema di PL il problema determinare i livelli mensili di produzione di A, B, C tali da massimizzare il profitto complessivo.
2. Determinare la soluzione ottima del problema con l'algoritmo del simplesso (fase 1 e fase 2).
3. Impostare il problema duale e determinarne la soluzione ottima a partire dalla soluzione trovata al punto precedente.

Soluzione

Associando una variabile alla quantità (in kg) prodotta di ogni solvente, si hanno tre variabili x_A, x_B, x_C e tre vincoli: uno sul fatturato minimo, uno sulla quantità disponibile di risorsa D e uno sulla produzione minima di B e C.

$$\max \quad 6x_A + 9x_B + 8x_C$$
$$\begin{cases} 40x_A + 60x_B + 20x_C \geq 10.000.000 \\ 5x_A + 8x_B + 6x_C \leq 2.000.000 \\ x_B + x_C \geq 150.000 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Per risolvere il problema occorre portarlo in forma standard introducendo 3 variabili di scarto s_1, s_2, s_3 e poi passare al problema artificiale introducendo 2 variabili artificiali y_1, y_3.

$$\min \quad y_1 + y_3$$
$$\begin{cases} 40x_A + 60x_B + 20x_C - s_1 + y_1 = 10.000.000 \\ 5x_A + 8x_B + 6x_C + s_2 = 2.000.000 \\ x_B + x_C - s_3 + y_3 = 150.000 \\ x, s, y \geq 0 \end{cases}$$

FASE 1: la base iniziale contiene le variabili $[y_1, s_2, y_3]$. Alla prima iterazione entra x_A ed esce y_1. Alla seconda iterazione entra x_B ed esce y_3. Fine della Fase 1, la base finale è $[x_A, s_2, x_B]$.
FASE 2: Alla prima iterazione entra x_C ed esce x_B. Alla seconda iterazione entra s_3 ed esce s_2. Fine della Fase 2, la soluzione finale è $[x_A, s_3, x_C] = [142.857 \quad 64.286 \quad 214.286]$.

DUALE

$$\max \quad 6x_A + 9x_B + 8x_C \qquad\qquad min \quad 10.000.000u_1 + 2.000.000u_2 + 150.000u_3$$

$$\begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{cases} 40x_A + 60x_B + 20x_C \geq 10.000.000 \\ 5x_A + 8x_B + 6x_C \leq 2.000.000 \\ x_B + x_C \geq 150.000 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_A \\ x_B \\ x_C \end{array} \begin{cases} 40u_1 + 5u_2 \geq 6 \\ 60u_1 + 8u_2 + u_3 \geq 9 \\ 20u_1 + 6u_2 + u_3 \geq 8 \\ u_1, u_3 \leq 0 \,;\, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione ottima duale si ottiene dalla riga 0 della matrice carry finale, ovvero dalle condizioni di ortogonalità, che richiedono:

$$\begin{array}{l} x_A \neq 0 \\ x_C \neq 0 \\ s_3 \neq 0 \end{array} \begin{cases} 40u_1 + 5u_2 = 6 \\ 20u_1 + 6u_2 + u_3 = 8 \\ u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -1/35 \\ u_2 = 10/7 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

Nelle tabelle sono riportate le caratteristiche dei 15 archi di un grafo con 6 nodi.

- Applicando un opportuno algoritmo si individui il taglio di capacità minima tra i nodi 1 e 6 del grafo e specificando la capacità del taglio e gli archi che lo compongono.
- Applicando un opportuno algoritmo si calcoli l'albero dei cammini minimi a partire dal nodo 1 e verso tutti gli altri nodi. Si utilizzi il valore di capacità specificato in tabella come costo.

Archi	(1,2)	(1,3)	(1,5)	(1,6)	(2,3)	(2,5)	(2,6)	(3,2)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,5)	(4,6)	(5,4)	(5,6)
Capacità \Costo	26	5	4	10	20	5	5	7	4	15	2	8	10	3	21

Soluzione

FORD-FULKERSON

Il taglio di capacità minima si può calcolare stabilendo il massimo flusso circolante nel grafo. Applicando l'algoritmo di Ford-Fulkerson un possibile ordine in cui vengono individuati i cammini aumentanti è:

1-6 $\delta = 10$ $\varphi = 10$
1-3-6 $\delta = 2$ $\varphi = 12$
1-2-6 $\delta = 5$ $\varphi = 17$
1-5-6 $\delta = 4$ $\varphi = 21$

1-3-4-6	$\delta = 3$	$\varphi = 24$
1-2-5-6	$\delta = 5$	$\varphi = 29$
1-2-3-4-6	$\delta = 4$	$\varphi = 33$
1-2-3-5-6	$\delta = 11$	$\varphi = 44$
1-2-3-5-4-6	$\delta = 1$	$\varphi = 45$

Il taglio di capacità minima è S = [1], T = [2,3,4,5,6], gli archi che lo compongono sono (1,5), (1,6), (1,2), (1,3), (1,6). La capacità del taglio è pari a 45.

DIJKSTRA

L'algoritmo di Dijkstra procede inserendo nel taglio i seguenti nodi: 1, 5, 3, 6, 4, 2 oppure 1, 5, 3, 4, 6, 2. L'albero delle distanze minime è composto dai seguenti archi (1,3), (1,5), (3,2), (3,6), (5,4). La distanza minima a partire dal nodo 1 verso gli altri nodi è 4 (nodo 5), 5 (nodo 3), 7 (nodi 4 e 6), 12 (nodo 2).

B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Ricerca Operativa 1 – Secondo recupero

21 Settembre 2007

Nome:

Cognome:

Barrare la casella corrispondente: **Laurea Ing. Informatica** ○ **Altro** _____ ○

Esercizio 1

La società Brillacasa produce tre varietà di prodotti per la casa: Brillavetro, Brillacucina e Brillapavimenti, i cui prezzi di vendita sono, rispettivamente, 10, 30 e 20 euro/kg. Il profitto sul Brillavetro è pari al 30% del prezzo di vendita, mentre il profitto su Brillacucina e Brillapavimenti è pari al 20% del prezzo di vendita.
La società desidera ottenere un fatturato mensile da questi prodotti non inferiore a 8 milioni di euro.
I tre prodotti si ottengono mescolando uno stesso principio attivo brevettato Brillax con degli additivi acquistati sul mercato. Per produrre 1 kg di Brillavetro servono 5 gr di Brillax, per 1 kg di Brillacucina o Brillapavimenti servono rispettivamente 8 e 10 gr di Brillax.
Il Brillax viene prodotto in un impianto Brillacasa della capacità massima di 4 tonnellate/mese. Si consideri che l'intera produzione mensile, comunque ripartita tra i tre prodotti, possa sempre essere venduta sul mercato e che tuttavia si debba garantire la produzione di almeno 200 tonnellate/mese complessive tra Brillacucina e Brillapavimenti.

1. Si formuli come problema di PL il problema determinare i livelli mensili di produzione di Brillavetro, Brillacucina e Brillapavimenti tali da massimizzare il profitto complessivo della Brillacasa.
2. Determinare la soluzione ottima del problema con l'algoritmo del simplesso (fase 1 e fase 2).
3. Impostare il problema duale e determinarne la soluzione ottima a partire dalla soluzione trovata al punto precedente.

Soluzione

Associando una variabile alla quantità (in kg) prodotta di ogni prodotto, si hanno tre variabili x_{BV}, x_{BC}, x_{BP} e tre vincoli: uno sul fatturato minimo, uno sulla quantità disponibile di Brillax e uno sulla produzione minima di Brillacucina e Brillapavimenti.

$$\max \quad 3x_{BV} + 6x_{BC} + 4x_{BP}$$
$$\begin{cases} 10x_{BV} + 30x_{BC} + 20x_{BP} \geq 8.000.000 \\ 5x_{BV} + 8x_{BC} + 10x_{BP} \leq 4.000.000 \\ x_{BC} + x_{BP} \geq 200.000 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Per risolvere il problema occorre portarlo in forma standard introducendo 3 variabili di scarto s_1, s_2, s_3 e poi passare al problema artificiale introducendo 2 variabili artificiali y_1, y_3.

$$\max \quad y_1 + y_2$$
$$\begin{cases} 10x_{BV} + 30x_{BC} + 20x_{BP} - s_1 + y_1 = 8.000.000 \\ 5x_{BV} + 8x_{BC} + 10x_{BP} + s_2 = 4.000.000 \\ x_{BC} + x_{BP} - s_3 + y_1 = 200.000 \\ x, s, y \geq 0 \end{cases}$$

FASE 1: la base iniziale contiene le variabili $[y_1, s_2, y_3]$. Alla prima iterazione entra x_{BV} ed esce y_1. Alla seconda iterazione entra x_{BC} ed esce y_3. Fine della Fase 1, la base finale è $[x_{BV}, s_2, x_{BC}]$.
FASE 2: la soluzione finale è $[s_1, x_{BC}, s_3] = [7.000.000 \quad 500.000 \quad 300.000]$.

DUALE

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_{BV} + 6x_{BC} + 4x_{BP} \\ \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} & \begin{cases} 10x_{BV} + 30x_{BC} + 20x_{BP} \geq 8.000.000 \\ 5x_{BV} + 8x_{BC} + 10x_{BP} \leq 4.000.000 \\ x_{BC} + x_{BP} \geq 200.000 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \min & 8.000.000u_1 + 4.000.000u_2 + 200.000u_3 \\ \begin{array}{l} x_{BV} \\ x_{BC} \\ x_{BP} \end{array} & \begin{cases} 10u_1 + 5u_2 \geq 3 \\ 30u_1 + 8u_2 + u_3 \geq 6 \\ 20u_1 + 10u_2 + u_3 \geq 4 \\ u_1, u_3 \leq 0 \,;\, u_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Dalle condizioni di ortogonalità si ha:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ 30u_1 + 8u_2 + u_3 = 6 \\ u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 3/4 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

Nelle tabelle sono riportate le caratteristiche dei 15 archi di un grafo con 6 nodi.

- Applicando un opportuno algoritmo si individui il taglio di capacità minima tra i nodi 1 e 6 del grafo e specificando la capacità del taglio e gli archi che lo compongono.
- Applicando un opportuno algoritmo si calcoli l'albero dei cammini minimi a partire dal nodo 1 e verso tutti gli altri nodi. Si utilizzi il valore di capacità specificato in tabella come costo.

Archi	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,3)	(2,6)	(3,2)	(3,4)	(3,6)	(4,3)	(4,5)	(4,6)	(5,4)	(5,6)
Capacità \Costo	8	12	6	17	10	5	4	3	2	18	2	1	5	5	5

Soluzione

FORD-FULKERSON

Il taglio di capacità minima si può calcolare stabilendo il massimo flusso circolante nel grafo. Applicando l'algoritmo di Ford-Fulkerson un possibile ordine in cui vengono individuati i cammini aumentanti è:

1-6 $\delta = 10$ $\varphi = 10$
1-2-6 $\delta = 4$ $\varphi = 14$
1-3-6 $\delta = 12$ $\varphi = 26$
1-4-6 $\delta = 5$ $\varphi = 31$
1-5-6 $\delta = 5$ $\varphi = 36$
1-2-3-6 $\delta = 4$ $\varphi = 40$
1-4-3-6 $\delta = 1$ $\varphi = 41$
1-5-4-3-6 $\delta = 1$ $\varphi = 42$

Il taglio di capacità minima è S = [1,4,5], T = [2,3,6], gli archi che lo compongono sono (1,2), (1,3), (1,6), (3,4), (4,3), (4,6) e (5,6). La capacità del taglio è pari a 42.

DIJKSTRA

L'algoritmo di Dijkstra procede inserendo nel taglio i seguenti nodi: 1, 4, 5, 2, 3, 6 oppure 1, 4, 5, 3, 2, 6. L'albero delle distanze minime è composto dai seguenti archi (1,2), (1,4), (1,6), (4,3), (4,5). La distanza minima a partire dal nodo 1 verso gli altri nodi è 6 (nodo 4), 7 (nodo 5), 8 (nodi 2 e 3), 10 (nodo 6).