A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Secondo appello
13 settembre 2011

Esercizio 1

È dato il problema di PL in figura.

1. verificare l'ammissibilità della soluzione $\bar{x}^T = (2 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$.
2. Se $\bar{x}$ è ammissibile dimostrarne o confutarne l'ottimalità con le condizioni di ortogonalità, se non è ammissibile risolvere il problema con l'algoritmo del simplesso rivisto (fase 1 e fase 2).

$$\min \quad -3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5$$
$$\begin{cases} -x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = -2 \\ x_2 \quad \textit{libera} \\ x_5 \le 0 \\ x_1, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Soluzione

Per verificare l'ammissibilità della soluzione è sufficiente sostituire i valori alle variabili corrispondenti e verificare il rispetto dei vincoli del problema.

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = -2 \\ x_2 \quad \textit{libera} \\ x_5 \le 0 \\ x_1, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+0-0-1=2 \quad \textit{NON SODDISFATTO} \\ 4 \quad -0+0 = 4 \\ -2-1 \quad -0 = -2 \quad \textit{NON SODDISFATTO} \\ 1 \le 0 \quad \textit{NON SODDISFATTO} \\ 2,0,0 \ge 0 \end{cases}$$

E' quindi necessario risolvere il problema con l'algoritmo del simplesso. Allo scopo occorre:

1. portare il sistema in forma standard effettuando le sostituzioni: $x_2 = x_2^+ - x_2^-$, $x_5 = -x_5^-$. E' utile anche cambiare segno al terzo vincolo. Si ha:

$$\min \quad -3x_1 - 2(x_2^+ - x_2^-) - x_3 + x_4 + (-x_5^-)$$
$$\begin{cases} -(x_2^+ - x_2^-) + x_3 - x_4 - (-x_5^-) = 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - (x_2^+ - x_2^-) + x_4 = 2 \\ x_2^+, x_2^- x_1, x_3, x_4, -x_5^- \ge 0 \end{cases}$$

2. definire il problema artificiale introducendo tre variabili artificiali:

$$\min \quad y_1 + y_2 + y_3$$
$$\begin{cases} -x_2^+ + x_2^- + x_3 - x_4 + x_5^- + y_1 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 + y_2 = 4 \\ x_1 - x_2^+ + x_2^- + x_4 + y_3 = 2 \\ x_2^+, x_2^- x_1, x_3, x_4, -x_5^- \ge 0 \end{cases}$$

3. Risolvere la fase 1. Base iniziale (y_1, y_2, y_3). Entra x_1 esce y_2 (applicando la regola di Bland), entra x_2^- esce y_3 (iterazione degenere), entra x_3 esce x_2^- (iterazione degenere), entra x_2^+ esce y_1. Fine fase 1.
4. Risolvere la fase 2. Base iniziale (x_2^+, x_1, x_3). $-u^T = (7 \quad 6 \quad -9)$. Entra x_4 e il problema risulta illimitato inferiormente.

Esercizio 2

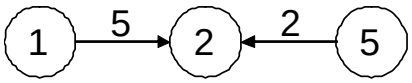
In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 6 nodi 1…6. Per ogni arco sono dati il valore della sua capacità massima ed un flusso iniziale.

1. Partendo dalla soluzione data in tabella, si determini una soluzione ottima al problema di massimo flusso dal nodo 1 al nodo 5 utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Evidenziare la soluzione ottima trovata.
2. Individuare un taglio di capacità minima tra i nodi 1 e 5. Evidenziare il taglio ottimo trovato.
3. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto 1, si determini il nuovo flusso massimo nei tre casi seguenti:
   a. la capacità dell'arco (3,2) è ridotta a zero
   b. la capacità dell'arco (2,3) è incrementata di 10 unità
   c. la capacità dell'arco (6,5) è ridotta a zero

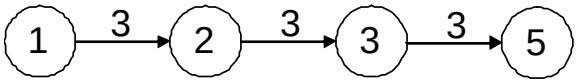
Archi	1, 2	2, 1	1, 4	6, 1	2, 3	3, 2	5, 2	3, 5	6, 3	4, 6	5, 6	6,5
Flussi	0	2	2	0	0	0	2	2	2	2	0	0
Capacità	5	5	10	1	8	3	3	6	8	7	5	7

Soluzione

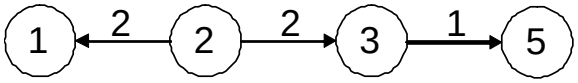
Il flusso iniziale è 0. Si trovano i cammini aumentanti



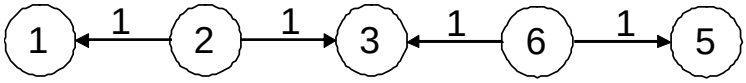
flusso totale 0+2=2



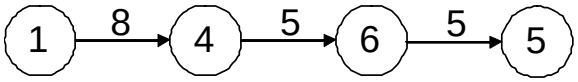
flusso totale 2+3=5



flusso totale 5+1=6



flusso totale 6+1=7



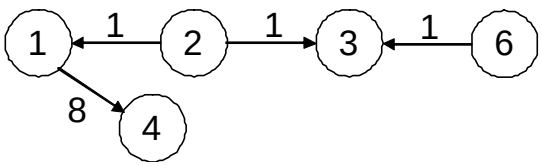
flusso totale 7+5=12

La ricerca dell'ultimo cammino aumentante evidenzia il taglio {1,4}{2,3,5,6} di capacità 12, pari al flusso corrente. Il flusso 12 è pertanto massimo e il taglio minimo è costituito dai nodi 1 e 4.

3. Partendo dalla soluzione ottima trovata al punto 1:

   a. se la capacità dell'arco (3,2) è ridotta a zero non cambia nulla in quanto l'arco (3,2) ha flusso 0 all'ottimo (quindi la soluzione corrente resta ammissibile) e non appartiene al taglio minimo
   b. se la capacità dell'arco (2,3) è incrementata di 10 unità non cambia nulla in quanto l'arco (2,3) non appartiene al taglio minimo (e incrementare la sua capacità non modifica l'ammissibilità del flusso corrente)

   c. se la capacità dell'arco (6,5) è ridotta a zero gli ultimi due cammini aumentanti non sono più ammissibili. A partire dalla soluzione con flusso 6 la ricerca di nuovi cammini aumentanti evidenzia il taglio:



   di capacità 6 (la capacità del solo arco (3,5)), pari al flusso corrente che pertanto è massimo.

B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Secondo appello
13 settembre 2011

Esercizio 1

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 6 nodi 1…6. Per ogni arco sono dati il costo unitario di percorrenza ed un flusso iniziale.

1. Partendo dalla SBA in tabella, calcolare la domanda di ciascun nodo e individuare le sorgenti della rete;
2. Determinare una soluzione ottima al problema di flusso di costo minimo utilizzando la fase 2 del simplesso su reti (o dimostrare che non esiste soluzione ottima). Evidenziare la soluzione ottima trovata (o un ciclo di costo negativo).
3. Se è stata trovata una soluzione ottima, diminuire di un'unità il costo dell'arco (6,5) e, utilizzando le condizioni di ortogonalità, determinare o confutare l'ottimalità della soluzione ottima trovata al punto 2.

Archi	1, 2	2, 1	1, 4	6, 1	2, 3	3, 2	5, 2	3, 5	6, 3	4, 6	5, 6	6,5
Flussi	5	0	0	8	7	0	1	0	0	8	0	0
Costi	5	-3	4	6	-1	2	3	3	5	7	5	0

Soluzione

1. per calcolare la domanda dei nodi è sufficiente calcolare la differenza (flusso entrante - flusso uscente) per ciascun nodo:

$$\begin{cases} d_1 = 0+8-5-0=3 \\ d_2 = 5-0-7+0+1=-1 \\ d_3 = 7-0-0+0=7 \\ d_4 = 0-8=-8 \\ d_5 = -1+0-0+0=-1 \\ d_6 = -8-0+8+0-0=0 \end{cases}$$

   Le sorgenti sono i nodi a domanda negativa, quindi i nodi 2,4,5.
2. A partire dalla SBA data, entra (6,3) esce (1,2); entra (6,5) esce (6,3); entra (2,1) esce (6,1); la base corrente è ottima. Il flusso ottimo è:

Archi	1, 2	2, 1	1, 4	6, 1	2, 3	3, 2	5, 2	3, 5	6, 3	4, 6	5, 6	6,5
Flussi	0	3	0	0	7	0	9	0	0	8	0	8
Costi	5	-3	4	6	-1	2	3	3	5	7	5	0

Esercizio 2

È dato il problema di PL in figura.

1. verificare l'ammissibilità della soluzione $\bar{x}^T = (2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2)$.
2. Se $\bar{x}$ è ammissibile dimostrarne o confutarne l'ottimalità con le condizioni di ortogonalità, se non è ammissibile dimostrare o confutare l'esistenza di una soluzione ottima con x_1 e x_4 diverse da zero.

$$\max \quad 3x_1 + x_3 + x_4 - x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 \quad + x_3 + x_4 \quad = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \quad = 6 \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 \quad \textit{libera}, \; x_3 \le 0, \; x_2, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Soluzione

Per verificare l'ammissibilità della soluzione è sufficiente sostituire i valori alle variabili corrispondenti e verificare il rispetto dei vincoli del problema.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 \quad \textit{libera} \\ x_3 \le 0 \\ x_2, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 0 + 0 = 4 \\ 6 - 0 + 0 + 0 = 6 \\ 0 + 0 + 0 - 2 = -2 \\ 6 \quad \textit{libera} \\ 0 \le 0 \\ 0,0,2 \ge 0 \end{cases}$$

La soluzione data è quindi ammissibile. Utilizzando le condizioni di ortogonalità si costruisce il problema duale:

$$\min \quad 4y_1 + 6y_2 - 2y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 = 3 \\ -y_2 + y_3 \ge 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 \le 1 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1 \\ -y_3 \ge -1 \\ y_1, y_2, y_3 \quad \textit{libere} \end{cases}$$

Le condizioni di ortogonalità portano al sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 = 3 \\ -y_3 = -1 \end{cases}$$

Che ammette infinite soluzioni. E' necessario verificare se ne esista almeno una ammissibile duale. Allo scopo sostituiamo le condizioni nelle disequazioni duali e risolviamo il sistema con il metodo di eliminazione di Fourier-Motzkin:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 = 3 \\ -y_2 + y_3 \ge 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 \le 1 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1 \\ -y_3 = -1 \end{cases}$$ proiezione per sostituzione di $y_3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 = 3 \\ -y_2 + 1 \ge 0 \\ y_1 + y_2 + 1 \le 1 \\ y_1 + 2y_2 + 1 \ge 1 \end{cases}$

Proiezione per sostituzione di $y_2 = 1 - \frac{2}{3} y_1 \Rightarrow \begin{cases} -1 + \frac{2}{3} y_1 + 1 \ge 0 \\ y_1 + 1 - \frac{2}{3} y_1 + 1 \le 1 \\ y_1 + 2 - \frac{4}{3} y_1 + 1 \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \ge 0 \\ y_1 \le -3 \\ 6 \ge y_1 \end{cases}$

Che è evidentemente incompatibile. Pertanto non esistono soluzioni ammissibili duali che soddisfino le condizioni di ortogonalità e quindi la soluzione data $\bar{x}^T = (2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2)$ NON è ottima.