A– 2^A PI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
16 giugno 2021

Nome:	Matricola:
Cognome:	

Esercizio 1

Una fabbrica di schede elettroniche deve allocare operai specializzati alla produzione di un nuovo tipo di scheda. Il processo di lavorazione di una scheda richiede due operazioni, montaggio e test, che possono essere effettuate da operai diversi in tempi diversi. Tuttavia, è necessario che l'operazione di montaggio di una scheda venga eseguita senza interruzioni dallo stesso operaio all'interno di uno stesso turno di lavoro. Lo stesso requisito vale per l'operazione di test. L'operazione di montaggio di una scheda richiede 120 minuti, l'operazione di test richiede 90 minuti, il turno di lavoro di un operaio è di 8 ore consecutive.

1. Formulare il problema di PL di realizzare 240 schede (montaggio e test) ed eseguire la sola operazione di test su ulteriori 60 schede già montate. L'obiettivo è di completare il lavoro con il minimo numero di turni-operaio.
2. Trovare a occhio una soluzione ammissibile tale che alcuni operai lavorano solo al montaggio e altri solo al test e dimostrarne o meno l'ottimalità facendo uso delle condizioni di ortogonalità.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 9 nodi *s*1…7*t* e 15 archi *a*…*q*. Per ogni arco, oltre al nome dell'arco (ultima riga della tabella), è riportato un flusso iniziale e il valore della sua capacità massima. In particolare, *s* è il nodo sorgente, mentre *t* è il nodo pozzo.

Arco	*s* , 1	*s* , 5	*s* , 2	6 , *s*	1 , 6	5 , 7	7 , 3	2 , *t*	6 , 4	*t* , 6	4 , *t*	3 , *t*	6 , 2	2 , 7	*t* , 7
Flusso	1	0	2	2	1	0	3	0	1	3	1	3	1	3	0
Capacità	11	99	8	7	15	11	10	98	18	8	16	9	20	7	5
Nome	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*

2.1. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile, e spiegarne il motivo. In caso affermativo, mostrare il flusso iniziale. Altrimenti, scaricare il flusso.
2.2 Determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di *Ford e Fulkerson* e facendo uso dell'albero dei cammini aumentanti.
2.3. Mostrare un taglio di capacità minima tra i nodi *s* e *t*, indicando la capacità del taglio.
2.4. Si determini come variano il flusso massimo e il taglio di capacità minima tra i nodi *s* e *t* (individuati rispettivamente ai punti 2.2 e 2.3) nel caso in cui l'arco (*s*, 1) ha capacità pari a 110.

N.B. Mostrare tutti i passi dell'algoritmo. Motivare ogni risposta data.

Domanda 3

Illustrare le definizioni di cammino e di percorso in un digrafo. Illustrare l'algoritmo di *Floyd-Warshall* per trovare un percorso orientato minimo in un digrafo pesato tra ciascuna coppia di nodi. In particolare, dimostrare la correttezza dell'algoritmo e discuterne la complessità computazionale.

C– ESAME

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello d'esame
16 giugno 2021

Nome:	Matricola:
Cognome:	

Esercizio 1

Una fabbrica di schede elettroniche deve allocare operai specializzati alla produzione di un nuovo tipo di scheda. Il processo di lavorazione di una scheda richiede due operazioni, montaggio e test, che possono essere effettuate da operai diversi in tempi diversi. Tuttavia, è necessario che l'operazione di montaggio di una scheda venga eseguita senza interruzioni dallo stesso operaio all'interno di uno stesso turno di lavoro. Lo stesso requisito vale per l'operazione di test. L'operazione di montaggio di una scheda richiede 120 minuti, l'operazione di test richiede 90 minuti, il turno di lavoro di un operaio è di 8 ore consecutive.

1. Formulare il problema di PL di realizzare 240 schede (montaggio e test) ed eseguire la sola operazione di test su ulteriori 80 schede già montate. L'obiettivo è di completare il lavoro con il minimo numero di turni-operaio.
2. Ridurre il problema in forma standard e, utilizzando l'algoritmo del simplesso (fase 1, se necessaria, e fase 2), trovare una soluzione ottima del problema in forma standard o dimostrare che il problema è inammissibile o illimitato inferiormente.

Esercizio 2

In tabella sono riportati gli archi di una rete di flusso composta da 9 nodi *s*1…7*t* e 15 archi *a*…*q*. Per ogni arco, oltre al nome dell'arco (ultima riga della tabella), è riportato un flusso iniziale e il valore della sua capacità massima. In particolare, *s* è il nodo sorgente, mentre *t* è il nodo pozzo.

Arco	*s* , 1	*s* , 5	*s* , 2	6 , *s*	1 , 6	5 , 7	7 , 3	2 , *t*	6 , 4	*t* , 6	4 , *t*	3 , *t*	6 , 2	2 , 7	*t* , 7
Flusso	1	0	2	2	1	0	3	0	1	3	1	3	1	3	0
Capacità	11	99	8	7	15	11	10	98	18	8	16	9	20	7	5
Nome	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*

2.1. Partendo dai dati in tabella, determinare se la distribuzione di flusso iniziale data è ammissibile, e spiegarne il motivo. In caso affermativo, mostrare il flusso iniziale. Altrimenti, scaricare il flusso.
2.2 Determinare una soluzione ottima al problema del massimo flusso utilizzando l'algoritmo di *Ford e Fulkerson* e facendo uso dell'albero dei cammini aumentanti.
2.3. Mostrare un taglio di capacità minima tra i nodi *s* e *t*, indicando la capacità del taglio.
2.4. Si determini come variano il flusso massimo e il taglio di capacità minima tra i nodi *s* e *t* (individuati rispettivamente ai punti 2.2 e 2.3) nel caso in cui l'arco (*s*, 1) ha capacità pari a 110.

N.B. Mostrare tutti i passi dell'algoritmo. Motivare ogni risposta data.

Domanda 3

Illustrare le definizioni di cammino e di percorso in un digrafo. Illustrare l'algoritmo di *Floyd-Warshall* per trovare un percorso orientato minimo in un digrafo pesato tra ciascuna coppia di nodi. In particolare, dimostrare la correttezza dell'algoritmo e discuterne la complessità computazionale.

B– 2^{A} PI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Seconda prova intermedia
16 giugno 2021

Nome:	Matricola:
Cognome:	

Esercizio 1

Ereditate un terreno di 4 ettari e 24.000 euro. Decidete di lavorare la terra per due anni per poi vendere tutto e ritornare in città con il massimo capitale possibile. Allo scopo potete:

1. Coltivare grano: per seminare e coltivare un ettaro a grano vi servono 6000 euro e dopo un anno potrete incassare 10.000 euro dalla vendita del raccolto e vi ritroverete con un ettaro di terreno incolto riutilizzabile.
2. Piantare alberi di albicocche: per impiantare un ettaro di albicocche vi servono 20.000 euro ma l'investimento renderà su più anni, alla fine del primo anno potrete incassare 8000 euro e alla fine del secondo anno 12000.

Un ettaro di terreno incolto (o coltivato a grano) dopo due anni si può vendere a 80.000 euro, mentre un ettaro coltivato ad albicocche si può vendere a 110.000 euro. I soldi non investiti in attività produttive possono essere conservati per essere utilizzati in seguito ma non producono alcun utile.

1. Formulare il problema di massimizzare il capitale posseduto alla fine del secondo anno, ottenuto dalla vendita dei raccolti, del terreno e dagli eventuali soldi inutilizzati, al netto delle spese sostenute nei due anni. Nota: il capitale disponibile alla fine del primo anno può essere reinvestito in altre attività del secondo anno.
2. Utilizzando le condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare l'esistenza di una soluzione ottima che preveda di coltivare solo grano nel primo anno e solo albicocche nel secondo anno.

Esercizio 2

Nella tabella sono riportati gli archi di un digrafo pesato composto da 8 nodi 1…8 e 15 archi *a*…*q*. Per ogni arco sono date le coppie di nodi (*x, y*), orientate da *x* a *y* (prima riga), il costo dell'arco (seconda riga), e il nome dell'arco (terza riga).

3 , 4	3 , 5	3 , 6	7 , 3	4 , 1	4 , 2	5 , 2	6 , 7	7 , 2	2 , 1	1 , 8	2 , 8	7 , 8	4 , 5	5 , 6
2	4	6	1	15	11	10	3	3	3	7	11	14	1	2
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*

2.1. Trovare l'albero dei cammini orientati di costo minimo dal nodo 3 verso tutti gli altri nodi utilizzando la versione efficiente dell'algoritmo di *Dijkstra*. Indicare in quale ordine vengono aggiunti gli archi all'albero. Mostrare l'albero dei cammini orientati di costo minimo dal nodo 3.
2.2. Dalla tabella ricavare il grafo pesato composto dai vertici 1…8. In tabella, per ogni lato sono dati i vertici incidenti, il suo costo e il suo nome. Trovare e mostrare un albero ricoprente di costo minimo partendo dal nodo 1 tramite la versione efficiente dell'algoritmo di *Prim-Dijkstra*. Indicare in quale ordine vengono aggiunti i vertici in *S*.
2.3. Gli alberi ottimi trovati ai punti 2.1 e 2.2 sono diversi tra loro? Perché?
2.4. Determinare come varia la soluzione ottima ai punti 2.1 e 2.2 nel caso in cui (7, 2) ha costo 11.

N.B. Mostrare tutti i passi dell'algoritmo. Motivare ogni risposta data.

Domanda 3

Illustrare la definizione di (1) problema duale e coppia primale-duale nella PL. Enunciare e dimostrare i teoremi di dualità (2) debole e (3) forte.

D– ESAME

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Studi in Ingegneria Informatica
Ricerca Operativa 1 – Primo appello d'esame
16 giugno 2021

Nome:	Matricola:
Cognome:	

Esercizio 1

Ereditate un terreno di 4 ettari e 24.000 euro. Decidete di lavorare la terra per due anni per poi vendere tutto e ritornare in città con il massimo capitale possibile. Allo scopo potete:

1. Coltivare grano: per seminare e coltivare un ettaro a grano vi servono 6000 euro e dopo un anno potrete incassare 10.000 euro dalla vendita del raccolto e vi ritroverete con un ettaro di terreno incolto riutilizzabile.
2. Piantare alberi di albicocche: per impiantare un ettaro di albicocche vi servono 20.000 euro ma l'investimento renderà su più anni, alla fine del primo anno potrete incassare 6000 euro e alla fine del secondo anno 18000.

Un ettaro di terreno incolto (o coltivato a grano) dopo due anni si può vendere a 75.000 euro, mentre un ettaro coltivato ad albicocche si può vendere a 100.000 euro. I soldi non investiti in attività produttive possono essere conservati per essere utilizzati in seguito ma non producono alcun utile.

3. Formulare il problema di massimizzare il capitale posseduto alla fine del secondo anno, ottenuto dalla vendita dei raccolti, del terreno e dagli eventuali soldi inutilizzati, chiaramente al netto delle spese sostenute nei due anni. Nota: il capitale disponibile alla fine del primo anno può essere reinvestito in altre attività del secondo anno.
4. Utilizzando le condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare l'esistenza di una soluzione ottima che preveda di coltivare solo grano nel primo anno e solo albicocche nel secondo anno.

Esercizio 2

Nella tabella sono riportati gli archi di un digrafo pesato composto da 8 nodi 1…8 e 15 archi *a*…*q*. Per ogni arco sono date le coppie di nodi (*x*, *y*), orientate da *x* a *y* (prima riga), il costo dell'arco (seconda riga), e il nome dell'arco (terza riga).

3 , 4	3 , 5	3 , 6	7 , 3	4 , 1	4 , 2	5 , 2	6 , 7	7 , 2	2 , 1	1 , 8	2 , 8	7 , 8	4 , 5	5 , 6
2	4	6	1	15	11	10	3	3	3	7	11	14	1	2
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*

2.1. Trovare l'albero dei cammini orientati di costo minimo dal nodo 3 verso tutti gli altri nodi utilizzando la versione efficiente dell'algoritmo di *Dijkstra*. Indicare in quale ordine vengono aggiunti gli archi all'albero. Mostrare l'albero dei cammini orientati di costo minimo dal nodo 3.
2.2. Dalla tabella ricavare il grafo pesato composto dai vertici 1…8. In tabella, per ogni lato sono dati i vertici incidenti, il suo costo e il suo nome. Trovare e mostrare un albero ricoprente di costo minimo partendo dal nodo 1 tramite la versione efficiente dell'algoritmo di *Prim-Dijkstra*. Indicare in quale ordine vengono aggiunti i vertici in *S*.
2.3. Gli alberi ottimi trovati ai punti 2.1 e 2.2 sono diversi tra loro? Perché?
2.4. Determinare come varia la soluzione ottima ai punti 2.1 e 2.2 nel caso in cui (7, 2) ha costo 11.

N.B. Mostrare tutti i passi dell'algoritmo. Motivare ogni risposta data.

Domanda 3

Illustrare le definizioni di (1) soluzione base ammissibile di un sistema in forma standard e (2) vertice di un poliedro. Dimostrare che una soluzione ammissibile di un problema di PL in forma standard è un vertice del poliedro delle soluzioni ammissibili (3) se e (4) solo se è una soluzione di base ammissibile. Unendo questo risultato alle condizioni geometriche di ottimalità (senza dimostrarle), dimostrare che (5) in un problema di PL in forma standard se esiste una soluzione ottima esiste una SBA ottima.